

Larisa Chiper Titire
Cristian Munteniță George Ghiocel Ojoc
Lorena Deleanu

Aplicații
pentru
Elemente de Inginerie Mecanică



Galați University Press
2023

Copyright © 2023 Galați University Press

Toate drepturile rezervate. Nicio parte a acestei publicații nu poate fi reprodusă în nicio formă, fără acordul scris al editurii.

Colecția Științe Inginerești

Galați University Press – Cod CNCSIS 281

Editura Universității „Dunărea de Jos”

Str. Domnească, nr. 47, 800008 – Galați, ROMÂNIA

Tel. 0336 130 139; Fax: 00 40 236 461 353

gup@ugal.ro

Referenți științifici :

Conf. Dr. Ciortan Sorin

Conf. Dr. Georgescu Constantin

ISBN 978-606-696-262-9

Tipărit la Editura Universității “Dunărea de Jos” din Galați
GALATI UNIVERSITY PRESS

Prefață

Prezenta culegere de aplicații este adresată studenților facultăților cu profil tehnic, fiind elaborată în conformitate cu programa analitică a cursului de *Elemente de inginerie mecanică*, disciplină predată studenților, înscriși la programele din domeniul ingineresc, din cadrul Universității „Dunărea de Jos” din Galați.

Autorii și-au propus ca această culegere de aplicații să facă trecerea de la teorie la practică, prin înțelegerea într-o formă mai riguroasă și accesibilă, în egală măsură, a noțiunilor fundamentale și a fenomenelor mecanice.

Enunțurile aplicațiilor sunt însoțite de rezolvări complete și sugestive, ce asigură asimilarea corectă a noțiunilor teoretice predate. Rezolvarea acestor aplicații nu va rămâne o enigmă nici pentru cititorii liceeni, care au aptitudini în domeniul ingineresc, matematică sau fizică.

Conf. univ. dr. ing. Cristian MUNTENIȚĂ

CUPRINS

<i>Prefață</i>	3
Cuprins	5
Capitolul 1. Statica	7
Capitolul 2. Cinematica	39
Capitolul 3. Dinamica	64
Capitolul 4. Întindere	96
Capitolul 5. Compresiune	117
Capitolul 6. Încovoierea barelor drepte	128
Capitolul 7. Diagrame de tensiuni la bare drepte	144
Bibliografie	163

CAPITOLUL 1. STATICA

Problema 1. Să se scrie proiecțiile vectorului \vec{A} pe axele de coordonate din Figura 1.1.

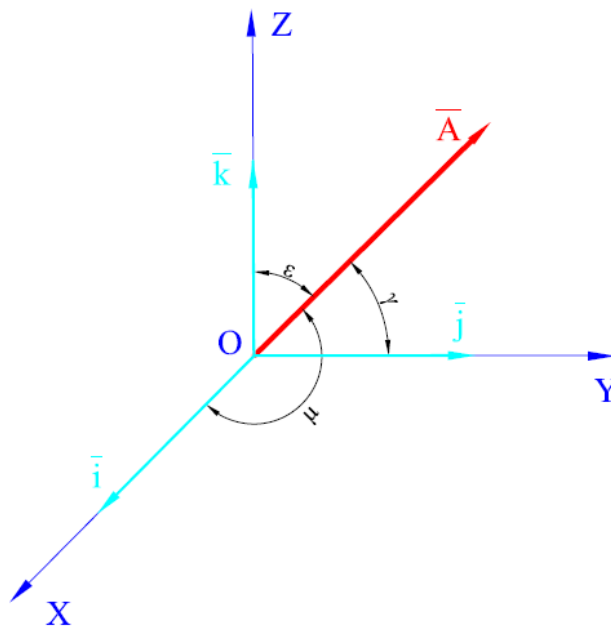


Figura 1.1

Se cunosc:

μ este unghiul dintre dreapta suport a vectorului \vec{A} și axa OX,
 γ este unghiul dintre dreapta suport a vectorului \vec{A} și axa OY,
 ϵ este unghiul dintre dreapta suport a vectorului \vec{A} și axa OZ,
 \vec{i} este versorul axei OX,
 \vec{j} este versorul axei OY,
 \vec{k} este versorul axei OZ.

Rezolvare

Proiecția vectorului \bar{A} pe axa OX este:

$$A_x = \text{pr}_{O_x} \bar{A} = \bar{A} \cdot \bar{i} = |\bar{A}| \cos \mu$$

Proiecția vectorului \bar{A} pe axa OY este:

$$A_y = \text{pr}_{O_y} \bar{A} = \bar{A} \cdot \bar{j} = |\bar{A}| \cos \gamma$$

Proiecția vectorului \bar{A} pe axa OZ este:

$$A_z = \text{pr}_{O_z} \bar{A} = \bar{A} \cdot \bar{k} = |\bar{A}| \cos \varepsilon$$

Problema 2. Să se efectueze calculul:

$$\bar{A} = 2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 - (2\bar{v}_1 - 3\bar{v}_2)$$

Rezolvare

$$\bar{A} = 2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 - 2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2$$

$$\bar{A} = 3\bar{v}_2 + 3\bar{v}_2$$

$$\bar{A} = 6\bar{v}_2$$

Problema 3. Să se calculeze expresia:

$$\bar{A} = r\bar{v}_1 - q\bar{v}_2 - (r + q)\bar{v}_1$$

unde r și q sunt două mărimi scalare.

Rezolvare

$$\bar{A} = r\bar{v}_1 - q\bar{v}_2 - r\bar{v}_1 - q\bar{v}_1$$

$$\bar{A} = -q\bar{v}_1 - q\bar{v}_2$$

Pe baza proprietăților de adunare a vectorilor se obține:

$$\bar{A} = -q(\bar{v}_1 + \bar{v}_2)$$

Problema 4. Să se calculeze expresiile $(\bar{a} + \bar{b})$ și $(\bar{a} - \bar{b})$.

Se dau expresiile vectorilor \bar{a} și \bar{b} :

$$\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\bar{b} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$$

Rezolvare

$$(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} + 2\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$(\bar{a} + \bar{b}) = 3\bar{i} + 6\bar{k}$$

$$(\bar{a} + \bar{b}) = 3(\bar{i} + 2\bar{k})$$

$$(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} - (2\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k})$$

$$(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} - 2\bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$$

$$(\bar{a} - \bar{b}) = -\bar{i} + 4\bar{j}$$

Problema 5. Să se calculeze vectorii \bar{C} și \bar{D} în funcție de versorii \bar{r}_1 și \bar{r}_2 :

$$\bar{C} = 8\bar{r}_1 + 15\bar{r}_2 - (8\bar{r}_1 - 15\bar{r}_2)$$

$$\bar{D} = 24\bar{r}_1 + 6\bar{r}_2 - (16\bar{r}_1 - 6\bar{r}_2)$$

Rezolvare

$$\bar{C} = 8\bar{r}_1 + 15\bar{r}_2 - (8\bar{r}_1 - 15\bar{r}_2)$$

$$\bar{C} = 8\bar{r}_1 + 15\bar{r}_2 - 8\bar{r}_1 + 15\bar{r}_2$$

$$\bar{C} = 15\bar{r}_2 + 15\bar{r}_2$$

$$\bar{C} = 30\bar{r}_2$$

$$\bar{D} = 24\bar{r}_1 + 6\bar{r}_2 - (16\bar{r}_1 - 6\bar{r}_2)$$

$$\bar{D} = 24\bar{r}_1 + 6\bar{r}_2 - 16\bar{r}_1 + 6\bar{r}_2$$

$$\bar{D} = 8\bar{r}_1 + 12\bar{r}_2$$

Problema 6. Să se calculeze $(\bar{a} + \bar{b})$ și $(\bar{a} - \bar{b})$, știind că:

$$\bar{a} = 8\bar{i} + 5\bar{j} + 7\bar{k}$$

$$\bar{b} = 9\bar{i} - 11\bar{j} + 3\bar{k}$$

Rezolvare

$$\bar{a} + \bar{b} = 8\bar{i} + 5\bar{j} + 7\bar{k} + 9\bar{i} - 11\bar{j} + 3\bar{k}$$

$$\bar{a} + \bar{b} = 17\bar{i} - 6\bar{j} + 10\bar{k}$$

$$\bar{a} - \bar{b} = 8\bar{i} + 5\bar{j} + 7\bar{k} - (9\bar{i} - 11\bar{j} + 3\bar{k})$$

$$\bar{a} - \bar{b} = 8\bar{i} + 5\bar{j} + 7\bar{k} - 9\bar{i} + 11\bar{j} - 3\bar{k}$$

$$\bar{a} - \bar{b} = -\bar{i} + 16\bar{j} + 4\bar{k}$$

Problema 7. Să se calculeze produsul vectorial al vectorilor \bar{R} și \bar{Q} , știind că:

$$\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k}$$

$$\bar{Q} = Q_x \bar{i} + Q_y \bar{j} + Q_z \bar{k}$$

Rezolvare

$$\bar{R} \times \bar{Q} = (R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k}) \times (Q_x \bar{i} + Q_y \bar{j} + Q_z \bar{k})$$

$$\begin{aligned} \bar{R} \times \bar{Q} = & R_x \bar{i} \times Q_x \bar{i} + R_x \bar{i} \times Q_y \bar{j} + R_x \bar{i} \times Q_z \bar{k} + R_y \bar{j} \times Q_x \bar{i} + R_y \bar{j} \times Q_y \bar{j} \\ & + R_y \bar{j} \times Q_z \bar{k} + R_z \bar{k} \times Q_x \bar{i} + R_z \bar{k} \times Q_y \bar{j} + R_z \bar{k} \times Q_z \bar{k} \end{aligned}$$

Produsul versorilor, considerând că versorii sunt versorii unui sistem ortogonal, este:

$$\bar{i} \times \bar{i} = 0$$

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$$

$$\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$$

$$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$$

$$\bar{j} \times \bar{j} = 0$$

$$\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$$

$$\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$$

$$\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$$

$$\bar{k} \times \bar{k} = 0$$

$$\bar{R} \times \bar{Q} =$$

$$= 0 + R_x Q_y \bar{k} - R_x Q_z \bar{j} - R_y Q_x \bar{k} + 0 + R_y Q_z \bar{i} + R_z Q_x \bar{j} - R_z Q_y \bar{i} + 0$$

$$\bar{R} \times \bar{Q} = (R_x Q_y - R_y Q_x) \bar{k} + (R_z Q_x - R_x Q_z) \bar{j} + (R_y Q_z - R_z Q_y) \bar{i}$$

Problema 8. Fie paralelipipedul din Figura 1.2, cu laturile $OA' = 4$ mm, $OD = 4$ mm, $OC' = 8$ mm.

Să se scrie analitic vectorii: $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$, $\overline{OC'}$, \overline{OA} , \overline{OD} și \overline{OB} .

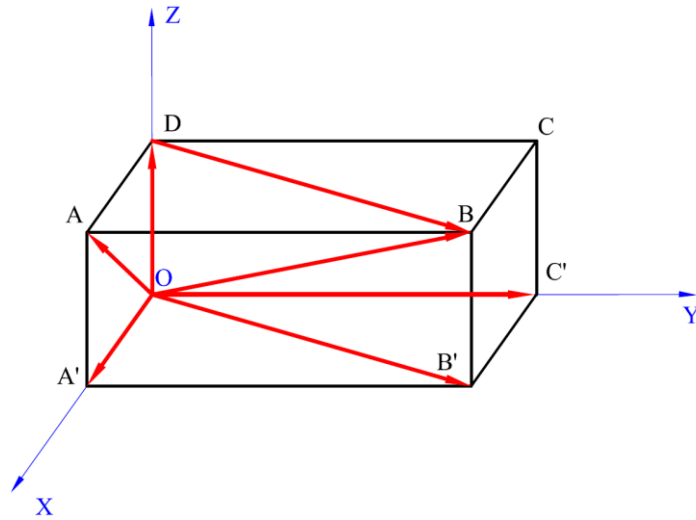


Figura 1.2

Rezolvare

$$\overline{OA'} = 4\bar{i}$$

$$\overline{OB'} = \overline{OA'} + \overline{OC'}$$

$$\overline{OB'} = 4\bar{i} + 8\bar{j}$$

$$\overline{OC'} = 8\bar{j}$$

$$\overline{OA} = \overline{OA'} + \overline{OD}$$

$$\overline{OA} = 4\bar{i} + 4\bar{k}$$

$$\overline{OD} = 4\bar{k}$$

$$\overline{OB} = \overline{OA'} + \overline{OC'} + \overline{OD}$$

$$\overline{OB} = 4\bar{i} + 8\bar{j} + 4\bar{k}$$

Problema 9. Se cere produsul scalar al vectorilor \bar{a} și \bar{b} .

Se dau expresiile vectorilor \bar{a} și \bar{b} :

$$\bar{a} = 6\bar{i} + 8\bar{j} - 6\bar{k}$$

$$\bar{b} = 10\bar{i} - 4\bar{j} - 4\bar{k}$$

Rezolvare

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 6 \cdot 10 + 8 \cdot (-4) + (-6) \cdot (-4) = 52$$

Problema 10. Se cere unghiul format de vectorii \bar{u} și \bar{v} (Figura 1.3).

Se dau expresiile vectorilor \bar{u} și \bar{v} :

$$\bar{u} = -6\bar{i} + 12\bar{j} - 4\bar{k}$$

$$\bar{v} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$$

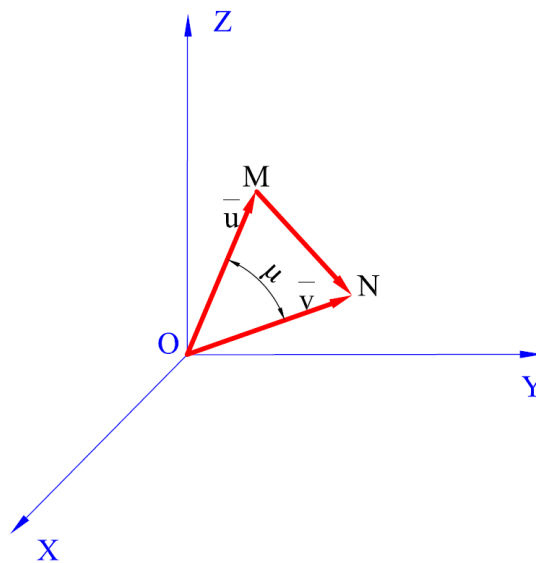


Figura 1.3

Rezolvare:

Se dau expresiile teoretice ale vectorilor \bar{v} și \bar{u} :

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}$$

$$\bar{u} = u_x\bar{i} + u_y\bar{j} + u_z\bar{k}$$

unde

v_x , v_y și v_z sunt proiecțiile pe axele de coordonate ale vectorului \bar{v} ,

u_x , u_y și u_z sunt proiecțiile pe axele de coordonate ale vectorului \bar{u} ,

\bar{i} este versorul axei OX,

\bar{j} este versorul axei OY,

\bar{k} este versorul axei OZ.

Rezultă

$$u_x = -6$$

$$u_y = 12$$

$$u_z = -4$$

$$v_x = 2$$

$$v_y = 2$$

$$v_z = 2$$

S-a notat cu μ unghiul dintre vectorii \bar{u} și \bar{v} .

Se consideră vectorul \overline{MN} .

$$\overline{MN} = \bar{v} - \bar{u}$$

$$|\bar{v} - \bar{u}|^2 = (\bar{v} - \bar{u}) \cdot (\bar{v} - \bar{u})$$

$$|\bar{v}|^2 = \bar{v} \cdot \bar{v}$$

$$|\bar{u}|^2 = \bar{u} \cdot \bar{u}$$

Rezultă că:

$$(\bar{v} - \bar{u}) \cdot (\bar{v} - \bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{u} - 2|\bar{v}| \cdot |\bar{u}| \cdot \cos \mu$$

$$(\bar{v} - \bar{u}) \cdot (\bar{v} - \bar{u}) = \bar{v} \cdot (\bar{v} - \bar{u}) - \bar{u} \cdot (\bar{v} - \bar{u}) = \bar{v} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{u} - 2 \cdot \bar{v} \cdot \bar{u}$$

Egalând relațiile de mai sus, se obține:

$$\bar{v} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{u} - 2|\bar{v}| \cdot |\bar{u}| \cdot \cos \mu = \bar{v} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{u} - 2 \cdot \bar{v} \cdot \bar{u}$$

rezultă:

$$\bar{v} \cdot \bar{u} = |\bar{v}| \cdot |\bar{u}| \cdot \cos \mu$$

Din relația $\bar{v} \cdot \bar{u} = |\bar{v}| \cdot |\bar{u}| \cdot \cos \mu$, rezultă:

$$\cos \mu = \frac{\bar{v} \cdot \bar{u}}{|\bar{v}| \cdot |\bar{u}|}$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{(-6)^2 + 12^2 + (-4)^2} = \sqrt{196} = 14$$

$$|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 \cdot 2 + 12 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 4$$

$$\cos \mu = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{4}{28\sqrt{3}}$$

$$\mu = \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(-\frac{1}{7\sqrt{3}}\right) = 85,26^\circ$$

Problema 11. Se cere produsul vectorial $\vec{r} \times \vec{s}$ și unghiul format de cei doi vectori \vec{r} și \vec{s} , cunoscând că:

$$\vec{r} = -6\vec{i} + 12\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{s} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Rezolvare:

Vectorii \vec{r} și \vec{s} se pot scrie:

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$$

$$\vec{s} = s_x\vec{i} + s_y\vec{j} + s_z\vec{k}$$

unde

r_x , r_y și r_z sunt proiecțiile pe axele de coordonate ale vectorului \vec{r}

$$r_x = -6$$

$$r_y = 12$$

$$r_z = -4$$

s_x , s_y și s_z sunt proiecțiile pe axele de coordonate ale vectorului \vec{s}

$$s_x = 2$$

$$s_y = 2$$

$$s_z = 2$$

\vec{i} este versorul axei OX,

\vec{j} este versorul axei OY,

\vec{k} este versorul axei OZ.

Produsul vectorial al vectorilor \vec{r} și \vec{s} este:

$$\begin{aligned} \vec{r} \times \vec{s} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ s_x & s_y & s_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 12 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 24\vec{i} - 12\vec{k} + 8\vec{j} - (24\vec{k} + 8\vec{i} - 12\vec{j}) \\ &= 24\vec{i} - 12\vec{k} + 8\vec{j} - 24\vec{k} - 8\vec{i} + 12\vec{j} = 16\vec{i} + 20\vec{j} - 36\vec{k} \\ \vec{r} \cdot \vec{s} &= |\vec{r}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\vec{r}, \vec{s}) \\ |\vec{r} \cdot \vec{s}| &= \sqrt{(-6 \cdot 2)^2 + (12 \cdot 2)^2 + (-4 \cdot 2)^2} = \sqrt{784} = 28 \\ |\vec{r}| &= \sqrt{(-6)^2 + 12^2 + (-4)^2} = \sqrt{196} = 14 \\ |\vec{s}| &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ \cos(r, s) &= \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{28}{14 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \angle(r, s) &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 11,97^\circ \end{aligned}$$

Problema 12. Se dă cubul din Figura 1.4, cu latura de 2 m și vectorii \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} , \overline{OD} , \overline{OE} , \overline{OF} și \overline{OG} . În Figura din dreapta este dat sistemul versorilor unitari ai sistemului XOYZ.

Se cer produsele vectoriale:

$$\begin{aligned} &\overline{OA} \times \overline{OB}, \\ &\overline{OC} \times \overline{OD}, \\ &\overline{OE} \times \overline{OF}, \\ &\overline{OA} \times \overline{OG}. \end{aligned}$$

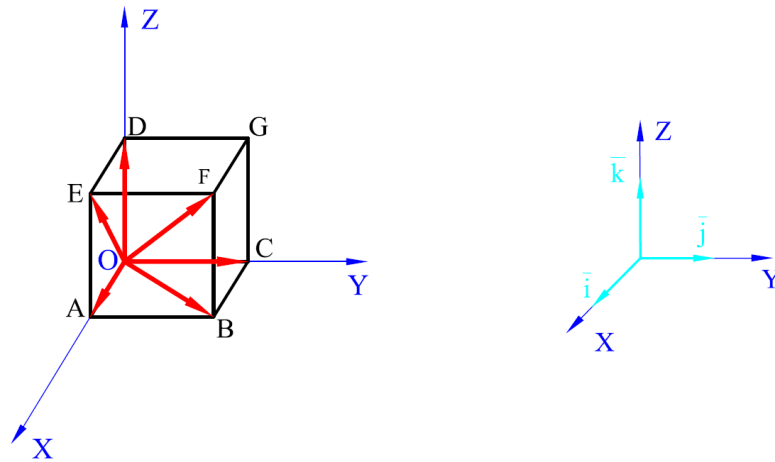


Figura 1.4

Rezolvare

Expresiile vectorilor \bar{a} și \bar{b} sunt:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$$

$$\bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$$

Produsul vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$ este dat de expresia analitică:

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} \end{aligned}$$

Se scriu vectorii prin versorii respectivi:

$$\overline{OA} = 2\bar{i}$$

$$\overline{OB} = 2\bar{i} + 2\bar{j}$$

$$\overline{OC} = 2\bar{j}$$

$$\overline{OD} = 2\bar{k}$$

$$\overline{OE} = 2\bar{i} + 2\bar{k}$$

$$\overline{OF} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$$

$$\overline{OG} = 2\bar{j} + 2\bar{k}$$

$$\begin{aligned} \overline{OA} \times \overline{OB} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \bar{i} \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot \bar{k} + 2 \cdot 0 \cdot \bar{j} \\ &\quad - (0 \cdot 2 \cdot \bar{k} + 0 \cdot 2 \cdot \bar{i} + 0 \cdot 2 \cdot \bar{j}) = 2^2 \bar{k} = 4\bar{k} \\ \overline{OC} \cdot \overline{OD} &= 2\bar{j} \cdot 2\bar{k} = 2^2 \bar{i} = 4\bar{i} \\ \overline{OE} \cdot \overline{OF} &= -2^2 \bar{i} + 2^2 \bar{k} = -4\bar{i} + 4\bar{k} \\ \overline{OA} \cdot \overline{OG} &= -2^2 \bar{j} + 2^2 \bar{k} = -4\bar{j} + 4\bar{k} \end{aligned}$$

Problema 13. Asupra paralelipipedului din Figura 1.5, cu laturile $OA=20$ mm, $OB=40$ mm, $OC=60$ mm, acționează forțele $F_1 = 20$ N, $F_2 = 40$ N și $F_3 = 20$ N.

Se cer momentele acestor forțe, în raport cu axele OX , OY și OZ .

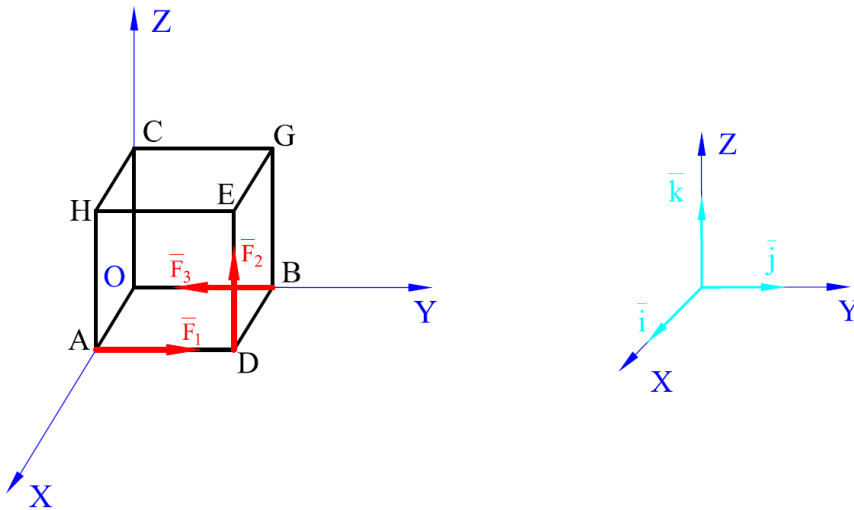


Figura 1.5

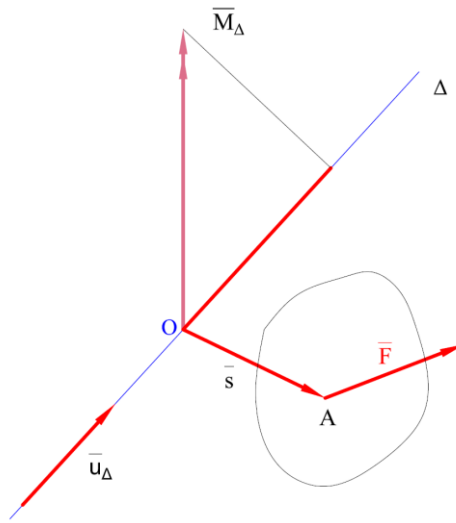


Figura 1.6. Momentul unei forțe față de axa Δ .

Rezolvare

$\bar{s} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ reprezintă expresia analitică a vectorului de poziție \bar{s}

$\bar{F} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}$ reprezintă expresia analitică a forței \bar{F} în raport cu sistemul de axe XOYZ.

În Figura 1.6 este arătat cum se calculează momentul forței \bar{F} , notat cu \bar{M}_Δ , față de axa Δ .

$$\bar{M}_\Delta(\bar{F}) = \bar{s} \times \bar{F}$$

în care \bar{s} este vectorul de poziție a forței \bar{F} față de axa Δ .

Expresia momentului forței \bar{F} față de axa Δ :

$$\begin{aligned} \bar{M}_\Delta(\bar{F}) = \bar{s} \times \bar{F} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= yF_z\bar{i} + xF_y\bar{k} + zF_x\bar{j} - (yF_x\bar{k} + zF_y\bar{i} + xF_z\bar{j}) \\ &= yF_z\bar{i} + xF_y\bar{k} + zF_x\bar{j} - yF_x\bar{k} - zF_y\bar{i} - xF_z\bar{j} \\ &= (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x - xF_z)\bar{j} + (xF_y - yF_x)\bar{k} \\ \bar{M}_\Delta(\bar{F}) &= M_x\bar{i} + M_y\bar{j} + M_z\bar{k} \end{aligned}$$

Vectorul moment $\overline{M}_\Delta(\overline{F})$ poate fi descompus în componente pe axele unui sistem de coordonate cartezian OXYZ.

unde

M_x reprezintă proiecția momentului $\overline{M}_\Delta(\overline{F})$, pe axa OX,

M_y reprezintă proiecția momentului $\overline{M}_\Delta(\overline{F})$, pe axa OY,

M_z reprezintă proiecția momentului $\overline{M}_\Delta(\overline{F})$, pe axa OZ.

Proiecțiile celor trei forțe din Figura 1.5 pe axele de coordonate sunt:

$$\overline{F}_1 = F_{1x}\overline{i} + F_{1y}\overline{j} + F_{1z}\overline{k}$$

cu

$$\begin{aligned} F_{1x} &= 0, \\ F_{1y} &= 20, \\ F_{1z} &= 0; \end{aligned}$$

unde F_{1x}, F_{1y}, F_{1z} sunt componentele carteziene ale forței \overline{F}_1 .

$$\overline{F}_2 = F_{2x}\overline{i} + F_{2y}\overline{j} + F_{2z}\overline{k}$$

cu

$$\begin{aligned} F_{2x} &= 0, \\ F_{2y} &= 0, \\ F_{2z} &= 40; \end{aligned}$$

unde F_{2x}, F_{2y}, F_{2z} sunt componentele carteziene ale forței \overline{F}_2 .

$$\overline{F}_3 = F_{3x}\overline{i} + F_{3y}\overline{j} + F_{3z}\overline{k}$$

cu

$$\begin{aligned} F_{3x} &= 0, \\ F_{3y} &= -20, \\ F_{3z} &= 0; \end{aligned}$$

unde F_{3x}, F_{3y}, F_{3z} sunt componentele carteziene ale forței \overline{F}_3 .

Momentele celor trei forțe față de axele de coordonate sunt:

a) Pentru forța \overline{F}_1

x_A, y_A, z_A sunt coordonatele punctului A, de aplicație a forței \overline{F}_1
($x_A=20$ mm; $y_A=0$; $z_A=0$)

$$M_{x(F_1)} = y_A F_{1z} - z_A F_{1y} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 20 = 0$$

$$M_{y(F_1)} = z_A F_{1x} - x_A F_{1z} = 0 \cdot 0 - 20 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_1)} = x_A F_{1y} - y_A F_{1x} = 20 \cdot 20 - 0 \cdot 0 = 400 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

b) Pentru forța $\overline{F_2}$

x_D, y_D, z_D sunt coordonatele punctului D, de aplicație a forței $\overline{F_2}$
($x_D=20$ mm; $y_D=40$ mm; $z_D=0$)

$$M_{x(F_2)} = y_D F_{2z} - z_D F_{2y} = 40 \cdot 40 - 0 \cdot 0 = 1600 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{y(F_2)} = z_D F_{2x} - x_D F_{2z} = 0 \cdot 0 - 20 \cdot 20 = -400 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{z(F_2)} = x_D F_{2y} - y_D F_{2x} = 20 \cdot 0 - 40 \cdot 0 = 0$$

c) Pentru forța $\overline{F_3}$

x_B, y_B, z_B sunt coordonatele punctului B de aplicație a forței $\overline{F_3}$
($x_B=0$; $y_B=40$ mm; $z_B=0$)

$$M_{x(F_3)} = y_B F_{3z} - z_B F_{3y} = 40 \cdot 0 - 0 \cdot (-20) = 0$$

$$M_{y(F_3)} = z_B F_{3x} - x_B F_{3z} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_3)} = x_B F_{3y} - y_B F_{3x} = 0 \cdot (-20) - 40 \cdot 0 = 0$$

Momentul rezultat $\overline{M_O}$ este:

$$\overline{M_O} = M_{x(R)} + M_{y(R)} + M_{z(R)}$$

$$M_{x(R)} = M_{x(F_1)} + M_{x(F_2)} + M_{x(F_3)}$$

$$M_{x(R)} = 0 + 1600 + 0 = 1600 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{y(R)} = M_{y(F_1)} + M_{y(F_2)} + M_{y(F_3)}$$

$$M_{y(R)} = 0 - 200 + 0 = -200 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{z(R)} = M_{z(F_1)} + M_{z(F_2)} + M_{z(F_3)}$$

$$M_{z(R)} = 400 + 0 + 0 = 400 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Problema 14. Se dau forțele V_1, V_2, V_3, V_4 și V_5 din Figura 1.7 și se cere să se determine rezultanta forțelor, \overline{R} și poziția rezultantei forței prin unghiul β față de axa OX.

Se cunosc:

$$V_1 = V_3 = V_4 = 12 \text{ N}$$

$$V_2 = V_5 = 18 \text{ N}$$

$$\alpha_1 = 0^\circ$$

$$\alpha_2 = 30^\circ$$

$$\alpha_3 = 0^\circ$$

$$\alpha_4 = 60^\circ$$

$$\alpha_5 = 45^\circ$$

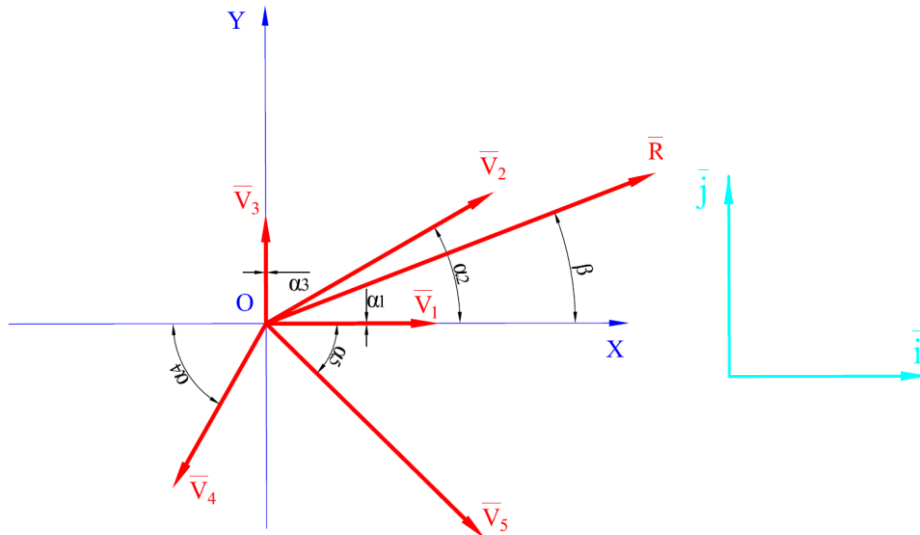


Figura 1.7

Rezolvare:

OXY este sistemul de referință cartezian.

Rezultanta \bar{R} este dată de expresia analitică:

$$\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j}$$

unde

\bar{R} este vectorul rezultatant (forța rezultatantă),

R_x este proiecția vectorului rezultatant pe axa OX și este dată de relația:

$$R_x = \sum_{i=1}^n V_{ix}$$

R_y este proiecția vectorului rezultatant pe axa OY și este dată de relația:

$$R_y = \sum_{i=1}^n V_{iy}$$

unde \bar{V}_i este forța care se definește analitic astfel:

$$\bar{V} = V_{ix} + V_{iy}$$

cu $i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\bar{V}_1 = V_{1x}\bar{i} + V_{1y}\bar{j}$$

cu

$$V_{1x} = 12 \text{ N};$$

$$V_{1y} = 0;$$

$$\bar{V}_1 = 12\bar{i}$$

$$\bar{V}_2 = V_{2x}\bar{i} + V_{2y}\bar{j}$$

cu

$$V_{2x} = V_2 \cos \alpha_2 = 18 \cdot \cos 30^\circ = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} = 15,58 \text{ N}$$

$$V_{2y} = V_2 \sin \alpha_2 = 18 \cdot \sin 30^\circ = 18 \cdot \frac{1}{2} = 9 \text{ N};$$

$$V_2 = 15,58\bar{i} + 9\bar{j}$$

$$\bar{V}_3 = V_{3x}\bar{i} + V_{3y}\bar{j}$$

cu

$$V_{3x} = 0;$$

$$V_{3y} = 12 \text{ N};$$

$$\bar{V}_3 = 12\bar{j}$$

$$\bar{V}_4 = V_{4x}\bar{i} + V_{4y}\bar{j}$$

cu

$$V_{4x} = V_4 \cos \alpha_4 = 12 \cdot \cos 60^\circ = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6 \text{ N};$$

$$V_{4y} = V_4 \sin \alpha_4 = 12 \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10,39 \text{ N}$$

$$\bar{V}_4 = 6\bar{i} + 10,39\bar{j}$$

$$\bar{V}_5 = V_{5x}\bar{i} + V_{5y}\bar{j}$$

cu

$$V_{5x} = V_5 \cos \alpha_4 = 18 \cdot \cos 45^\circ = 18 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 12,73 \text{ N};$$

$$V_{5y} = V_5 \cos \alpha_4 = 18 \cdot \sin 45^\circ = 18 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 12,72 \text{ N}$$

$$\bar{V}_5 = 16,97\bar{i} + 12,72\bar{j}$$

$$R_x = V_{1x} + V_{2x} + V_{3x} + V_{4x} + V_{5x} = 12 + 15,58 + 0 + 6 + 16,97 = 50,55 \text{ N}$$

$$R_y = V_{1y} + V_{2y} + V_{3y} + V_{4y} + V_{5y} = 0 + 9 + 12 + 10,39 + 12,72 = 44,11 \text{ N}$$

Modulul rezultantei R este:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{50,55^2 + 44,11^2} = 67,09 \text{ N}$$

Poziția rezultantei R este dată de unghiul β :

$$\tan \beta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{44,11}{50,55} = 0,87$$

$$\beta = \arctg \beta = 41,02^\circ$$

Problema 15. Asupra cubului de latură $a=1$ m acționează forțele $F_1 = 4$ N, $F_2 = 5$ N și $F_3 = 6$ N (Figura 1.8). Să se calculeze modulul momentului rezultat .

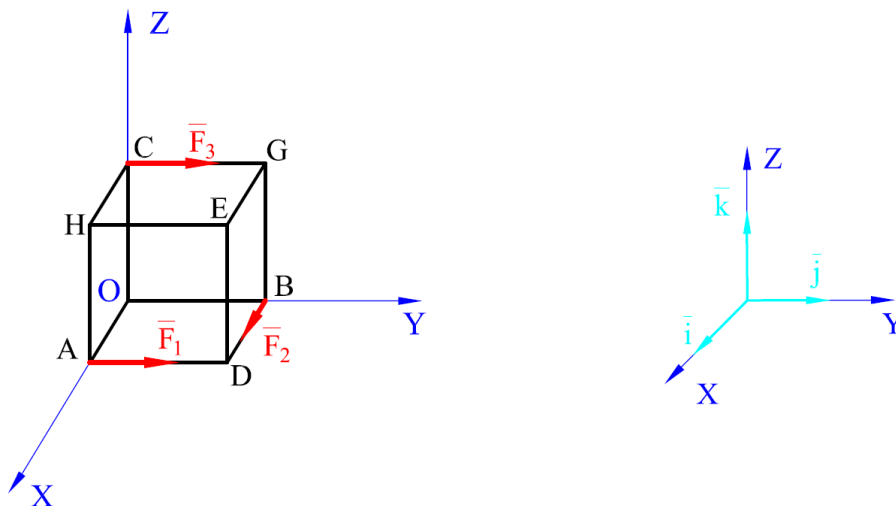


Figura 1.8

Rezolvare

Se determină vectorul forță rezultant \overline{R} și momentul rezultant $\overline{M_R}$.

OXYZ este sistemul de referință cartezian.

Proiecțiile forțelor pe axele de coordonate:

Forța $\overline{F_1}$ se poate scrie cu ajutorul versorilor

$$\overline{F_1} = F_{1x}\overline{i} + F_{1y}\overline{j} + F_{1z}\overline{k}$$

cu proiecțiile forțelor pe axele de coordonate:

$$F_{1x} = 0,$$

$$F_{1y} = 4 \text{ N},$$

$$F_{1z} = 0;$$

F_{1x}, F_{1y}, F_{1z} sunt componentele carteziene ale forței $\overline{F_1}$.

Forța $\overline{F_2}$ se poate scrie cu ajutorul versorilor

$$\overline{F_2} = F_{2x}\overline{i} + F_{2y}\overline{j} + F_{2z}\overline{k}$$

cu proiecțiile forțelor pe axele de coordonate:

$$F_{2x} = 5 \text{ N},$$

$$F_{2y} = 0,$$

$$F_{2z} = 0;$$

F_{2x}, F_{2y}, F_{2z} sunt componentele carteziene ale forței $\overline{F_2}$.

Forța $\overline{F_3}$ se poate scrie cu ajutorul versorilor

$$\overline{F_3} = F_{3x}\overline{i} + F_{3y}\overline{j} + F_{3z}\overline{k}$$

cu proiecțiile forțelor pe axele de coordonate:

$$F_{3x} = 0,$$

$$F_{3y} = 0,$$

$$F_{3z} = 6 \text{ N};$$

F_{3x}, F_{3y}, F_{3z} sunt componentele carteziene ale forței $\overline{F_3}$.

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$$

Vectorul forță rezultant se calculează cu următoarea formulă:

$$\overline{R} = R_x\overline{i} + R_y\overline{j} + R_z\overline{k}$$

unde

\overline{R} este vectorul rezultant (forța rezultantă),

R_x este modulul proiecției vectorului rezultant pe axa OX,

R_y este modulul proiecției vectorului rezultant pe axa OY,

R_z este modulul proiecției vectorului rezultant pe axa OZ.

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0 + 5 + 0 = 5 \text{ N}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 4 + 0 + 0 = 4 \text{ N}$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = 0 + 0 + 6 = 6 \text{ N}$$

Modulul rezultantei este:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{5^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{77} = 8,77 \text{ N}$$

Momentul rezultantei este:

$$\overline{M_R} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

$\overline{M_R}$ este momentul rezultant al forței \vec{R} față de axele de coordonate

$$\overline{M_R} = \overline{M_x} + \overline{M_y} + \overline{M_z}$$

Pentru forța \vec{F}_1

x_A, y_A, z_A sunt coordonatele punctului A, de aplicație a forței \vec{F}_1 ($x_A=1$ mm; $y_A=0$; $z_A=0$).

$$M_{x(F_1)} = y_A F_{1z} - z_A F_{1y} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 4 = 0$$

$$M_{y(F_1)} = z_A F_{1x} - x_A F_{1z} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_1)} = x_A F_{1y} - y_A F_{1x} = 1 \cdot 4 - 0 \cdot 0 = 4 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Pentru forța \vec{F}_2

x_B, y_B, z_B sunt coordonatele punctului B, de aplicație a forței \vec{F}_2 ($x_B = 0$; $y_B = 1 \text{ mm}$; $z_B = 0$)

$$M_{x(F_2)} = y_B F_{2z} - z_B F_{2y} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$M_{y(F_2)} = z_B F_{2x} - x_B F_{2z} = 0 \cdot 5 - 1 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_2)} = x_B F_{2y} - y_B F_{2x} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 5 = -5 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Pentru forța \vec{F}_3

x_C, y_C, z_C sunt coordonatele punctului C, de aplicație a forței \vec{F}_3 ($x_C = 0$; $y_C = 0$; $z_C = 1 \text{ mm}$)

$$M_{x(F_3)} = y_C F_{3z} - z_C F_{3y} = 0 \cdot 6 - 1 \cdot 0 = 0 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{y(F_3)} = z_C F_{3x} - x_C F_{3z} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 6 = 0$$

$$M_{z(F_3)} = x_C F_{3y} - y_C F_{3x} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0$$

$M_{x(F)}$ reprezintă proiecția momentului $\overline{M_\Delta}(\vec{F})$, pe axa OX,

$M_{y(F)}$ reprezintă proiecția momentului $\overline{M}_\Delta(\overline{F})$, pe axa OY,

$M_{z(F)}$ reprezintă proiecția momentului $\overline{M}_\Delta(\overline{F})$, pe axa OZ.

Momentul rezultat este:

$$M_{x(R)} = M_{x(F_1)} + M_{x(F_2)} + M_{x(F_3)}$$

$$M_{x(R)} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$M_{y(R)} = M_{y(F_1)} + M_{y(F_2)} + M_{y(F_3)}$$

$$M_{y(R)} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$M_{z(R)} = M_{z(F_1)} + M_{z(F_2)} + M_{z(F_3)}$$

$$M_{z(R)} = 4 - 5 + 0 = -1 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\overline{M}_R = 0 + 0 - 1 = -1$$

Modulul momentului rezultat este:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} = 1 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$\begin{cases} \overline{R} \neq 0 \\ \overline{M} \neq 0 \end{cases}$ și există următoarea situație:

$$|\overline{R}| \cdot |M| = \sqrt{77} \cdot 1 = \sqrt{77} = 8,77$$

Problema 16. Asupra cubului cu latura $l = 8 \text{ mm}$ acționează forțele $F_1 = 5 \text{ N}$, $F_1 = F_4 = 5 \text{ N}$ și $F_2 = F_3 = 2 \text{ N}$ (Figura 1.9). Se cere să se precizeze cu ce este echivalent sistemul.

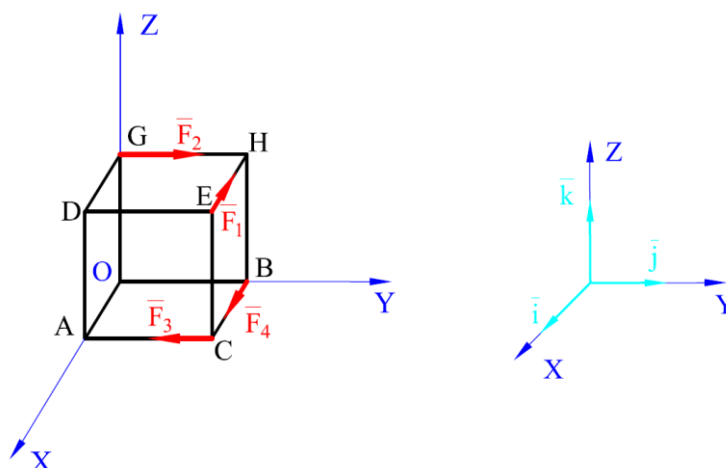


Figura 1.9

Rezolvare

Se determină forța rezultantă \overline{R} și momentul \overline{M}_O al rezultantei față de origine. Proiecțiile forțelor în funcție de versorii unitari ai sistemului de referință XOYZ sunt:

$$\overline{F}_1 = F_{1x}\overline{i} + F_{1y}\overline{j} + F_{1z}\overline{k}$$

cu

$$\begin{aligned} F_{1x} &= -5 \text{ N}, \\ F_{1y} &= 0, \\ F_{1z} &= 0; \end{aligned}$$

F_{1x}, F_{1y}, F_{1z} sunt componentele carteziene ale forței \overline{F}_1 .

$$\overline{F}_2 = F_{2x}\overline{i} + F_{2y}\overline{j} + F_{2z}\overline{k}$$

cu

$$\begin{aligned} F_{2x} &= 0, \\ F_{2y} &= 2 \text{ N}, \\ F_{2z} &= 0; \end{aligned}$$

F_{2x}, F_{2y}, F_{2z} sunt componentele carteziene ale forței \overline{F}_2 .

$$\overline{F}_3 = F_{3x}\overline{i} + F_{3y}\overline{j} + F_{3z}\overline{k}$$

cu

$$\begin{aligned} F_{3x} &= 0, \\ F_{3y} &= -2 \text{ N}, \\ F_{3z} &= 0; \end{aligned}$$

F_{3x}, F_{3y}, F_{3z} sunt componentele carteziene ale forței \overline{F}_3 .

$$\overline{F}_4 = F_{4x}\overline{i} + F_{4y}\overline{j} + F_{4z}\overline{k}$$

cu

$$\begin{aligned} F_{4x} &= 5 \text{ N}, \\ F_{4y} &= 0, \\ F_{4z} &= 0. \end{aligned}$$

F_{4x}, F_{4y}, F_{4z} sunt componentele carteziene ale forței \overline{F}_4 .

Vectorul forță rezultant se calculează cu următoarea formulă:

$$\overline{R} = R_x\overline{i} + R_y\overline{j} + R_z\overline{k}$$

unde

\bar{R} este vectorul rezultat (forța rezultantă),

R_x este modulul proiecției vectorului rezultat pe axa OX,

R_y este modulul proiecției vectorului rezultat pe axa OY,

R_z este modulul proiecției vectorului rezultat pe axa OZ.

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = -5 + 0 + 0 + 5 = 0$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 0 + 2 - 2 + 0 = 0$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Modulul rezultantei este:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$$

Vectorul moment rezultat M_R este:

$$\bar{M}_R = M_{x(R)}\bar{i} + M_{y(R)}\bar{j} + M_{z(R)}\bar{k}$$

$M_{x(R)}$ reprezintă proiecția momentului $\bar{M}_\Delta(\bar{R})$, pe axa OX,

$M_{y(R)}$ reprezintă proiecția momentului $\bar{M}_\Delta(\bar{R})$, pe axa OY,

$M_{z(R)}$ reprezintă proiecția momentului $\bar{M}_\Delta(\bar{R})$, pe axa OZ.

Pentru forța \bar{F}_1

x_E, y_E, z_E sunt coordonatele punctului E, de aplicație a forței \bar{F}_1 ($x_E=8$;
 $y_E=8$; $z_E=8$)

$$M_{x(F_1)} = y_E F_{1z} - z_E F_{1y} = 8 \cdot 0 - 8 \cdot 0 = 0$$

$$M_{y(F_1)} = z_E F_{1x} - x_E F_{1z} = 8 \cdot (-5) - 8 \cdot 0 = -40 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{z(F_1)} = x_E F_{1y} - y_E F_{1x} = 8 \cdot 0 - 8 \cdot (-5) = 40 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Pentru forța \bar{F}_2

x_G, y_G, z_G sunt coordonatele punctului G, de aplicație a forței \bar{F}_2 ($x_G=0$;
 $y_G=0$; $z_G=8$)

$$M_{x(F_2)} = y_G F_{2z} - z_G F_{2y} = 0 \cdot 0 - 8 \cdot 2 = -16 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{y(F_2)} = z_G F_{2x} - x_G F_{2z} = 8 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_2)} = x_G F_{2y} - y_G F_{2x} = 0 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 0$$

Pentru forța \bar{F}_3

x_C, y_C, z_C sunt coordonatele punctului C, de aplicație a forței \overline{F}_3 ($x_C=8$;
 $y_C=8$; $z_C=0$)

$$M_{x(F_3)} = y_C F_{3z} - z_C F_{3y} = 8 \cdot 0 - 0 \cdot (-2) = 0$$

$$M_{y(F_3)} = z_C F_{3x} - x_C F_{3z} = 0 \cdot 0 - 8 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_3)} = x_C F_{3y} - y_C F_{3x} = 8 \cdot (-2) - 8 \cdot 0 = -16 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Pentru forța \overline{F}_4

x_B, y_B, z_B sunt coordonatele punctului B, de aplicație a forței \overline{F}_4 ($x_B=0$;
 $y_B=8$; $z=0$)

$$M_{x(F_4)} = y_B F_{4z} - z_B F_{4y} = 8 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{y(F_4)} = z_B F_{4x} - x_B F_{4z} = 0 \cdot 5 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_4)} = x_B F_{4y} - y_B F_{4x} = 0 \cdot 0 - 8 \cdot 5 = -10 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Momentul rezultat este format din $M_{x(R)} + M_{y(R)} + M_{z(R)}$

$$|M_{x(R)}| = |M_{x(F_1)}| + |M_{x(F_2)}| + |M_{x(F_3)}| + |M_{x(F_4)}|$$

$$|M_{x(R)}| = 0 - 16 + 0 + 0 = -16 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$|M_{y(R)}| = |M_{y(F_1)}| + |M_{y(F_2)}| + |M_{y(F_3)}| + |M_{y(F_4)}|$$

$$|M_{y(R)}| = -40 + 0 + 0 + 0 = -40 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$|M_{z(R)}| = |M_{z(F_1)}| + |M_{z(F_2)}| + |M_{z(F_3)}| + |M_{z(F_4)}|$$

$$|M_{z(R)}| = 40 + 0 - 16 - 10 = -14 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\overline{M}_O = 0 + 0 + 0 = 0$$

Modulul momentului rezultat este:

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-16)^2 + (-40)^2 + (-14)^2} = 45,3 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Rezultă că

$$\begin{cases} \overline{R} = 0 \\ \overline{M} \neq 0 \end{cases}$$

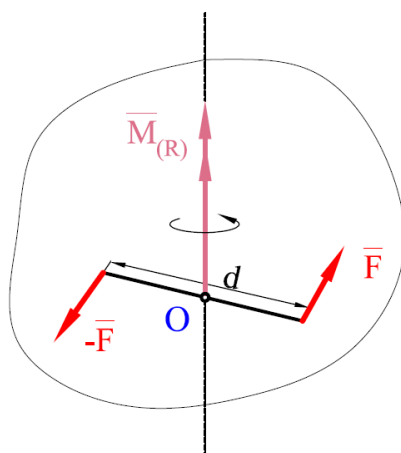


Figura 1.10

Sistemul este echivalent cu un moment. Acest moment poate fi produs de două forțe, egale în modul și de sens contrar care acționează într-un plan perpendicular pe direcția momentului $\vec{M}_{(R)}$. Sistemul este echivalent cu un cuplu de forțe $(\vec{F}', -\vec{F}')$, care lucrează în planul perpendicular pe \vec{M}_O .

Problema 17. Asupra cubului cu latura $a = 50 \text{ mm}$ acționează forțele $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 2 \text{ N}$ (Figura 1.11). Să se calculeze momentul rezultat \vec{M}_O .

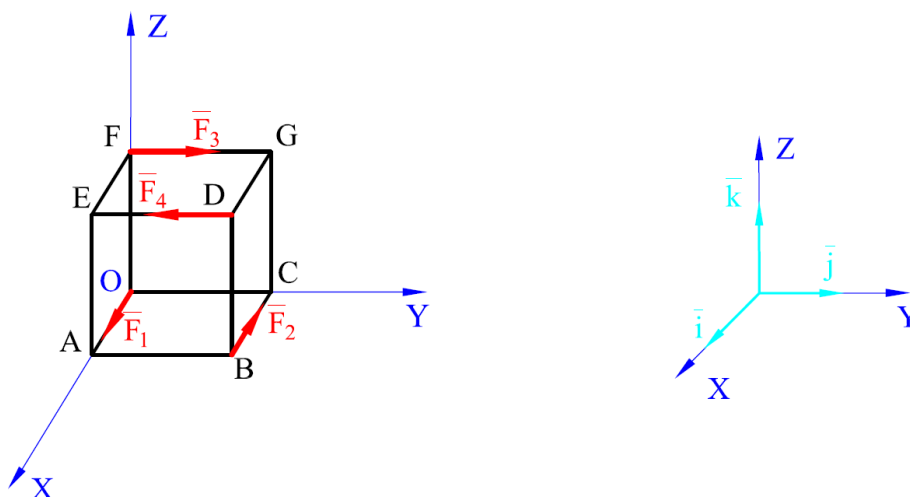


Figura 1.1

Rezolvare

Se determină vectorul rezultat \bar{R} și momentul \bar{M}_O al rezultantei \bar{R} față de originea O.

Proiecțiile forțelor pe axele de coordonate sunt:

$$\bar{F}_1 = F_{1x}\bar{i} + F_{1y}\bar{j} + F_{1z}\bar{k}$$

cu

$$F_{1x} = 2 \text{ N},$$

$$F_{1y} = 0,$$

$$F_{1z} = 0;$$

F_{1x}, F_{1y}, F_{1z} sunt componentele carteziene ale forței \bar{F}_1 .

$$\bar{F}_2 = F_{2x}\bar{i} + F_{2y}\bar{j} + F_{2z}\bar{k}$$

cu

$$F_{2x} = -2 \text{ N},$$

$$F_{2y} = 0,$$

$$F_{2z} = 0;$$

F_{2x}, F_{2y}, F_{2z} sunt componentele carteziene ale forței \bar{F}_2 .

$$\bar{F}_3 = F_{3x}\bar{i} + F_{3y}\bar{j} + F_{3z}\bar{k}$$

cu

$$F_{3x} = 0,$$

$$F_{3y} = 2 \text{ N},$$

$$F_{3z} = 0;$$

F_{3x}, F_{3y}, F_{3z} sunt componentele carteziene ale forței \bar{F}_3 .

$$\bar{F}_4 = F_{4x}\bar{i} + F_{4y}\bar{j} + F_{4z}\bar{k}$$

cu

$$F_{4x} = 0,$$

$$F_{4y} = -2 \text{ N},$$

$$F_{4z} = 0;$$

F_{4x}, F_{4y}, F_{4z} sunt componentele carteziene ale forței \bar{F}_4 .

Forța rezultantă este:

$$\bar{R} = R_x\bar{i} + R_y\bar{j} + R_z\bar{k}$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = 2 - 2 + 0 + 0 = 0$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = 0 + 0 + 2 - 2 = 0$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Modulul rezultantei este:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$$

Vectorul moment rezultat \overline{M}_O al forței \overline{R} este:

$$\overline{M}_O = M_x \overline{i} + M_y \overline{j} + M_z \overline{k}$$

Momentele celor patru forțe față de axele de coordonate sunt:

Pentru forța \overline{F}_1

x_O, y_O, z_O sunt coordonatele punctului O de aplicație a forței \overline{F}_1 ($x_O = 0$;
 $y_O = 0$; $z_O = 0$)

$$M_{x(F_1)} = y_O F_{1z} - z_O F_{1y} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$M_{y(F_1)} = z_O F_{1x} - x_O F_{1z} = 0 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_1)} = x_O F_{1y} - y_O F_{1x} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 2 = 0$$

Pentru forța \overline{F}_2

x_B, y_B, z_B sunt coordonatele punctului B de aplicație a forței \overline{F}_2 ($x_B =$
50 mm, $y_B = 50$ mm, $z = 0$)

$$M_{x(F_2)} = y_B F_{2z} - z_B F_{2y} = 50 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$M_{y(F_2)} = z_B F_{2x} - x_B F_{2z} = 0 \cdot (-2) - 50 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_2)} = x_B F_{2y} - y_B F_{2x} = 50 \cdot 0 - 50 \cdot (-2) = 100 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Pentru forța \overline{F}_3

x_G, y_G, z_G sunt coordonatele punctului G de aplicație a forței \overline{F}_3 ($x_G = 0$;
 $y_G = 0$; $z_G = 50$ mm)

$$M_{x(F_3)} = y_G F_{3z} - z_G F_{3y} = 0 \cdot 0 - 50 \cdot 2 = -100 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{y(F_3)} = z_G F_{3x} - x_G F_{3z} = 50 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_3)} = x_G F_{3y} - y_G F_{3x} = 0 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 0$$

Pentru forța \overline{F}_4

x_D, y_D, z_D sunt coordonatele punctului D de aplicație a forței \overline{F}_4 ($x_D =$
50 mm; $y_D = 50$ mm; $z_D = 50$ mm)

$$M_{x(F_4)} = y_D F_{4z} - z_D F_{4y} = 50 \cdot 0 - 50 \cdot (-2) = 100 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{y(F_4)} = z_D F_{4x} - x_D F_{4z} = 50 \cdot 0 - 50 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_4)} = x_D F_{4y} - y_D F_{4x} = 50 \cdot (-2) - 50 \cdot 0 = -100 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Momentul rezultant \overline{M}_O este:

$$M_{x(R)} = M_{x(F_1)} + M_{x(F_2)} + M_{x(F_3)} + M_{x(F_4)}$$

$$M_{x(R)} = 0 + 0 - 100 + 100 = 0$$

$$M_{y(R)} = M_{y(F_1)} + M_{y(F_2)} + M_{y(F_3)} + M_{y(F_4)}$$

$$M_{y(R)} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$M_{z(R)} = M_{z(F_1)} + M_{z(F_2)} + M_{z(F_3)} + M_{z(F_4)}$$

$$M_{z(R)} = 0 + 100 + 0 - 100 = 0$$

$$\overline{M}_O = 0 + 0 + 0 = 0$$

Problema 18. Se dau forțele $F_1 = 7 \text{ N}$, $F_2 = 5 \text{ N}$ și $F_3 = 7 \text{ N}$, acționând în planul XOY și se cere să se precizeze cu ce este echivalent sistemul (Figura 1.12). Se dau coordonatele punctelor A(2, 0), B(4, 0) și C(0, 3), date în milimetri.

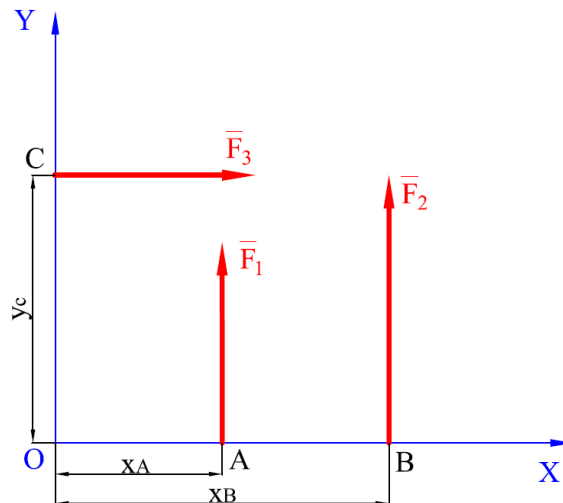


Figura 1.12.

Rezolvare

Proiecțiile forțelor pe axele de coordonate sunt:

$$\overline{F}_1 = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j}$$

cu

$$F_{1x} = 0, \\ F_{1y} = 7 \text{ N};$$

F_{1x}, F_{1y} sunt componentele carteziene ale forței \overline{F}_1 .

$$\overline{F}_2 = F_{2x}\overline{i} + F_{2y}\overline{j}$$

cu

$$F_{2x} = 0, \\ F_{2y} = 5 \text{ N};$$

F_{2x}, F_{2y} sunt componentele carteziene ale forței \overline{F}_2 .

$$\overline{F}_3 = F_{3x}\overline{i} + F_{3y}\overline{j}$$

cu

$$F_{3x} = 7 \text{ N}, \\ F_{3y} = 0;$$

F_{3x}, F_{3y} sunt componentele carteziene ale forței \overline{F}_3 .

Rezultanta celor trei forțe se poate scrie:

$$\overline{R} = R_x\overline{i} + R_y\overline{j} + R_z\overline{k}$$

$$R_x = \sum_{i=1}^3 F_{ix} = 0 + 0 + 7 = 7 \text{ N}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^3 F_{iy} = 7 + 5 + 0 = 12 \text{ N}$$

$$R_z = \sum_{i=1}^3 F_{iz} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Modulul rezultantei \overline{R} este:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{7^2 + 12^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{179} \text{ N}$$

$$R = 13,89 \text{ N} \neq 0$$

Vectorul moment resultant M_R este:

$$\overline{M}_R = M_{x(F)}\overline{i} + M_{y(F)}\overline{j} + M_{z(F)}\overline{k}$$

$M_{x(F)}$ reprezintă proiecția momentului $\overline{M}_\Delta(\overline{F})$, pe axa OX,

$M_{y(F)}$ reprezintă proiecția momentului $\overline{M}_\Delta(\overline{F})$, pe axa OY,

$M_{z(F)}$ reprezintă proiecția momentului $\overline{M}_\Delta(\overline{F})$, pe axa OZ.

Momentele celor trei forțe față de axele de coordonate sunt:

Pentru forța \overline{F}_1

x_A, y_A, z_A sunt coordonatele punctului A, de aplicație a forței \overline{F}_1 ($x_A = 2$ mm; $y_A = 0$; $z_A = 0$)

$$M_{x(F_1)} = y_A F_{1z} - z_A F_{1y} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 7 = 0$$

$$M_{y(F_1)} = z_A F_{1x} - x_A F_{1z} = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_1)} = x_A F_{1y} - y_A F_{1x} = 2 \cdot 7 - 0 \cdot 0 = 14 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Pentru forța \overline{F}_2

x_B, y_B, z_B sunt coordonatele punctului B, de aplicație a forței \overline{F}_2 ($x_B = 4$ mm; $y_B = 0$, $z_B = 0$)

$$M_{x(F_2)} = y_B F_{2z} - z_B F_{2y} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 5 = 0$$

$$M_{y(F_2)} = z_B F_{2x} - x_B F_{2z} = 0 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_2)} = x_B F_{2y} - y_B F_{2x} = 4 \cdot 5 - 0 \cdot 0 = 20 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Pentru forța \overline{F}_3

x_C, y_C, z_C sunt coordonatele punctului C, de aplicație a forței \overline{F}_3 ($x_C = 0$; $y_C = 3$ mm; $z_C = 0$)

$$M_{x(F_3)} = y_C F_{3z} - z_C F_{3y} = 3 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$M_{y(F_3)} = z_C F_{3x} - x_C F_{3z} = 0 \cdot 7 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$M_{z(F_3)} = x_C F_{3y} - y_C F_{3x} = 0 \cdot 0 - 3 \cdot 7 = -21 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Momentul rezultat este:

$$M_{x(R)} = M_{x(F_1)} + M_{x(F_2)} + M_{x(F_3)}$$

$$M_{x(R)} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$M_{y(R)} = M_{y(F_1)} + M_{y(F_2)} + M_{y(F_3)}$$

$$M_{y(R)} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$M_{z(R)} = M_{z(F_1)} + M_{z(F_2)} + M_{z(F_3)}$$

$$M_{z(R)} = 14 + 20 - 21 = 13 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$\overline{M}_O = 0 + 0 + 0 = 0$$

Trinomul invariant este:

$$\bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{R}} = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z$$

$$\bar{\mathbf{R}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{R}} = 7 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 0 \cdot 13 = 0$$

Deci, sistemul este echivalent cu o forță, $\bar{\mathbf{R}}$.

Problema 19. Să se determine centrul de greutate al barei din Figura 1.13 considerând materialul omogen.

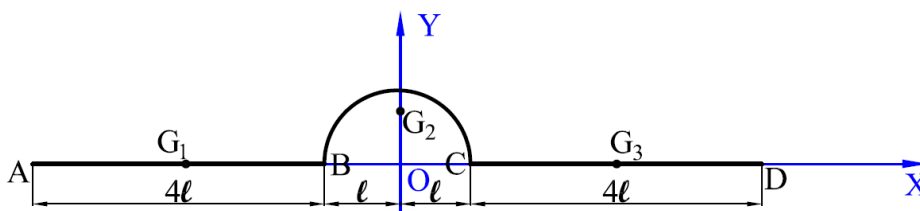


Figura 1.13

Caracteristicile barei	AB	BC	CD
Lungimea barei	4l	πl	4l
x_i	-4l	0	4l
y_i	0	$\frac{2l}{\pi}$	0

Rezolvare

Pentru o bară în formă de semicerc, centrul de greutate se află $x = 0$ și $y = \frac{2l}{\pi}$.

Se descompune bara în trei componente: segmentele drepte AB, CD și semicercul BC, cu centrele de greutate în G_1 , G_2 și G_3 .

În tabelul de mai sus sunt trecute lungimile barelor și pozițiile centrelor de greutate respective.

Coordonatele centrului de greutate a barei din Figura 1.14 sunt:

$$x_G = \frac{\sum_1^3 l_i x_i}{\sum_1^3 l_i} = \frac{4l(-4l) + \pi l \cdot 0 + 4l \cdot 4l}{2a + \pi a + 2a} = 0$$

$$y_G = \frac{\sum_1^3 l_i y_i}{\sum_1^3 l_i} = \frac{4l \cdot 0 + \pi l \cdot \frac{2l}{\pi} + 4l \cdot 0}{4l + \pi l + 4l} = \frac{2l^2}{l(8 + \pi)} = \frac{4l}{8 + \pi} = 0,35l$$

Deci, centrul de greutate al barei, G, are coordonatele:

$$x_G = 0$$

$$y_G = 0,35l$$

Problema 20. Se cere centrul de greutate al barei ABCD din Figura 1.14, cunoscând lungimile și pozițiile elementelor componente. Se consideră materialul omogen.

Se dă

$$\alpha = 30^\circ$$

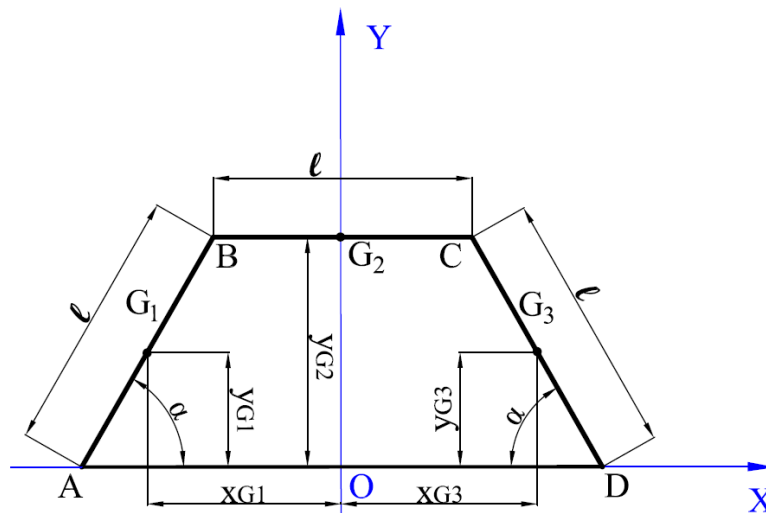


Figura 1.14

Caracteristicile barei	AB	BC	CD
Lungimea barei	l	l	l
x_{G_i}	$\frac{6l}{8}$	0	$\frac{6l}{8}$
y_{G_i}	$\frac{l\sqrt{3}}{4}$	$\frac{l\sqrt{3}}{4}$	$\frac{l\sqrt{3}}{4}$

Rezolvare:

Elementele componente ale barelor componente sunt trecute în tabelul de mai sus.

Centrele de greutate al Figurii 1.14 are coordonatele:

$$x_G = \frac{\sum_1^3 l_i x_i}{\sum_1^3 l_i} = \frac{-l \frac{6l}{8} + l \frac{6l}{8}}{3l} = 0$$

$$y_G = \frac{\sum_1^3 l_i y_i}{\sum_1^3 l_i} = \frac{l \left(\frac{l\sqrt{3}}{4} + \frac{l\sqrt{3}}{4} + \frac{l\sqrt{3}}{4} \right)}{3l} = \frac{l^2 \frac{3\sqrt{3}}{4}}{3l} = \frac{l\sqrt{3}}{4}$$

CAPITOLUL 2. CINEMATICA

Problema 1. Un punct material se deplasează având ecuațiile parametrice:

$$x = 3t$$

$$y = 30t - 3t^2$$

Să se calculeze durata mișcării până când punctul atinge orizontala, distanța parcursă pe orizontală, modulul vitezei și accelerației în momentul în care punctul atinge orizontala, cunoscând spațiul exprimat în m și timpul în s.

Rezolvare

Ecuția traiectoriei se obține eliminând timpul din ecuațiile parametrice.

$$x = 3t \Rightarrow t = \frac{x}{3}$$

se înlocuiește $x=3t$ în relația $y = 30t - 3t^2$ și se obține:

$$y = 150 \frac{x}{50} - 5 \left(\frac{x}{50}\right)^2 = 3x - 0,02x^2$$

Deci, traiectoria punctului material este o parabolă.

Durata mișcării până la atingerea axei OX se notează cu T, și se obține egalând ecuația parametrică y cu 0 ($y = 0$).

$$\begin{cases} t = T \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 30T - 3T^2 = 0$$

$$T(150 - 5T) = 0$$

Rezolvând ecuația $30T - 3T^2 = 0$, rezultă două soluții T_1 și T_2 , soluția T_2 fiind cea realistă.

$$T_1 = 0$$

$$30 - 3T = 0 \Rightarrow 3T = 30 \Rightarrow T_2 = \frac{30}{3} \Rightarrow T_2 = 10 \text{ s}$$

Distanța parcursă pe orizontală este:

$$T = \frac{x}{3} \Rightarrow x_{\max} = 3T$$

$$x_{\max} = 3 \cdot 10 = 30 \text{ m}$$

Calculul vitezei punctului material într-un punct de pe traiectorie se face scriind relația:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

unde

\vec{v} este vectorul viteză pentru punctul material,
 v_x este componenta vectorului viteză pe axa OX,
 v_y este componenta vectorului viteză pe axa OY,
 \vec{i} este versorul axei OX,
 \vec{j} este versorul axei OY.

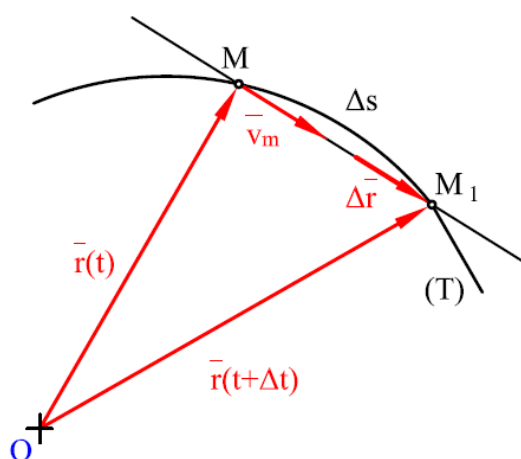


Figura 2.1

În Figura 2.1 este prezentată deplasarea punctului material M în M1 pe o traiectorie, în intervalul de timp Δt (\vec{v} este viteza punctului material, Δs =arcul de curbură, (T) traiectoria punctului M, $\Delta \vec{r}$ reprezintă variația vectorului de poziție al punctului M față de punctul O)

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

unde

Δt este intervalul de timp în care punctul material se deplasează din punctul M în punctul M_1 ,

t este timpul,

\vec{r} este vectorul de poziție al punctului M, la un moment dat, t.

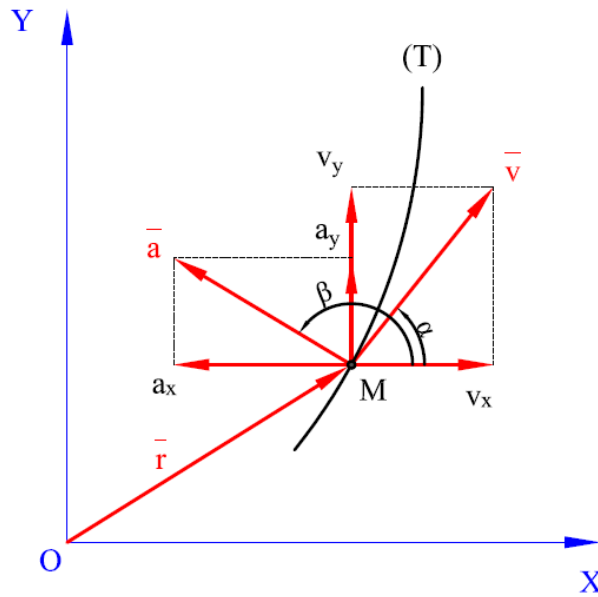


Figura 2.2

Componentele vitezei și accelerației în sistemul de axe OXY sunt date în Figura 2.2.

Derivata vectorului de poziție în raport cu timpul este:

$$d\vec{r} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_x = \frac{d(3t)}{dt}\vec{i} = 3 \text{ m/s}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$$v_y = \frac{d(30t - 3t^2)}{dt} = 30 - 3 \cdot 2t = 30 - 6t \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{3^2 + (30 - 6t)^2}$$

Pentru $t = T = 80 \text{ s}$

$$v = \sqrt{3^2 + (30 - 6 \cdot 80)^2}$$

$$v = \sqrt{3^2 + (30 - 480)^2}$$

$$v = \sqrt{3^2 + (-450)^2}$$

$$v = 450,01 \text{ m/s}$$

Accelația punctului material este

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j}$$

unde

\bar{a} este vectorul accelerație al punctului M,

a_x este componenta vectorului accelerație pe axa OX,

a_y este componenta vectorului accelerație pe axa OY,

\bar{i} este versorul axei OX,

\bar{j} este versorul axei OY.

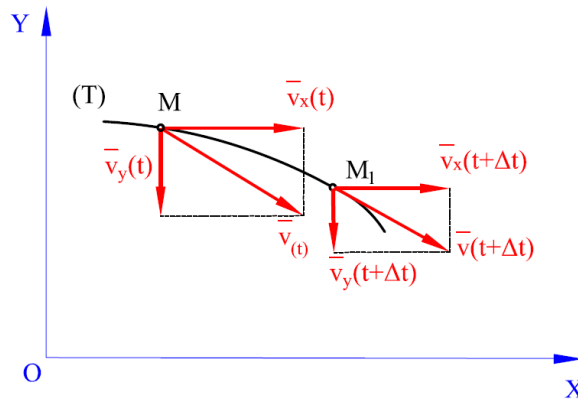


Figura 2.3.

În Figura 2.3 este dată variația vectorului viteză la deplasarea din punctul M în punctul M_1 .

$$\bar{a} = \bar{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{v}(t + \Delta t) - \bar{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \dot{\bar{v}}$$

$$\bar{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_x = 0$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$
$$a_y = \frac{d(30 - 6t)}{dt} = -6 \text{ m/s}^2$$

Problema 2. Se aruncă un punct material pe verticală, de jos în sus, cu o viteză inițială de 373 m/s (Figura 2.4). Până la ce înălțime ajunge punctul material? După cât timp revine pe pământ? Ce viteză are în momentul când atinge pământul?

Se neglijează frecarea cu aerul. Se consideră accelerația gravitațională, g , egală cu 10 m/s^2 .

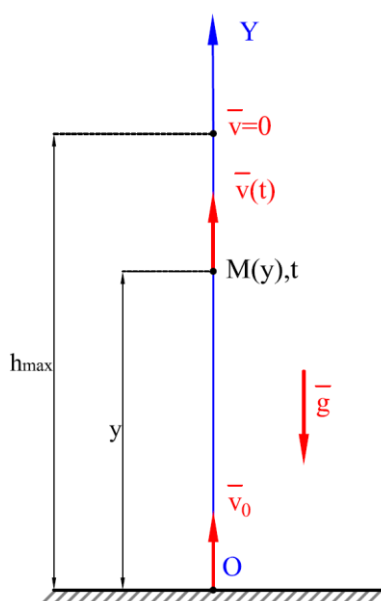


Figura 2.4

Rezolvare

Mișcarea pe verticală are 2 componente:

1. urcarea – o mișcare uniform încetinită (acelerația are sens invers vitezei),
2. coborârea – o mișcare uniform accelerată (acelerația are același sens cu viteza).

Punctul material are o mișcare uniform încetinită pe verticală, la urcare:

- traiectoria este o linie dreaptă (verticală),
- accelerația este constantă, negativă (accelerația gravitațională)

Condițiile inițiale pentru etapa de urcare sunt:

$$t_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$v_0 = 373 \text{ m/s}$$

Legea mișcării accelerate pentru un punct material este:

$$y = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + y_0$$

$$a = -g = -9,81 \cong -10 \text{ m/s}^2$$

Ecuția mișcării punctului material la urcare va fi:

$$y = \frac{10}{2}t^2 + 373t$$

$$y = -5t^2 + 373t$$

Expresia vitezei punctului material la urcare:

$$v = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$v = -10t + 373$$

Când punctul material atinge înălțimea maximă:

$$v = 0$$

$$-10t + 373 = 0 \Rightarrow t = 37,3 \text{ s}$$

Înlocuim pe $t=37,3$ s în ecuația mișcării punctului material, $y = -5t^2 + 373t$, se obține:

$$y = -5 \cdot 37,3^2 + 373 \cdot 37,3 = 6956,45 \text{ m}$$

Condiții inițiale pentru etapa de coborâre sunt:

$$v_0 = 0$$

$$y_0 = 6956,45 \text{ m}$$

Relația generală a mișcării punctului material este:

$$y = at^2 + vt + y_0$$

$$y = -at^2 + y_0$$

$$-10t^2 + 6956,45 = 0$$

$$t^2 = 6956,45$$

Ecuția de gradul 2 are 2 soluții, t_1 și t_2 .

$$t_1 = -83,40 \text{ momentul inițial,}$$

$$t_2 = 83,40 \text{ s momentul final.}$$

Punctul material revine pe pământ după 83,40 s de la lansare.

Viteza cu care punctul material, atinge pământul ($t = 83,40 \text{ s}$) este

$$v = -10 \cdot 83,40 + 373 = -461 \text{ m/s.}$$

Semnul minus indică faptul că punctul material parcurge axa Oy în sens negativ.

Problema 3. Se aruncă un punct material pe verticală de jos în sus, cu o viteză inițială de 400 m/s. La ce înălțime ajunge punctul material? După cât timp același punct revine pe pământ? Ce viteză are în momentul când atinge pământul?

Se neglijează frecarea cu aerul. Se consideră accelerația gravitațională, g , egală cu 10 m/s^2 .

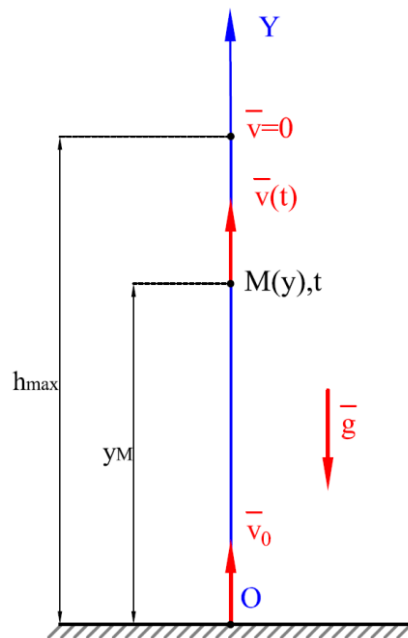


Figura 2.5

Rezolvare:

Mișcarea punctului material are două etape:

- etapa de urcare până la înălțimea h_{max} , o mișcare uniform decelerată,
- etapa de coborâre, care este o mișcare uniform accelerată, fără viteză inițială.

Mișcarea punctului material la urcare este uniform decelerată (vectorul accelerației are sens opus vitezei) pe durata mișcării:

- traiectoria punctului este o linie dreaptă,
- accelerația este constantă, negativă (față de sensul vitezei).

Condițiile inițiale ale mișcării punctului material sunt:

$$t_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$v_0 = 400 \text{ m/s}$$

Legea generală a mișcării punctului material, în care accelerația a și viteza inițială v_0 pot avea valoare pozitivă sau negativă, este:

$$y = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0$$

$$a = g = 10 \text{ m/s}^2$$

Ecuția mișcării punctului material este:

$$y = \frac{-10}{2}t^2 + 400t$$

$$y = -5t^2 + 400t$$

Expresia vitezei punctului material este:

$$v = \frac{dy}{dt} = \dot{x}$$

$$v = -10t + 400$$

Punctul își oprește ascensiunea când $v = 0$.

$$-10t + 400 = 0 \Rightarrow t = 40 \text{ s}$$

Înlocuind pe $t=40$ s în relația $y = -5t^2 + 400t$, și se obține înălțimea maximă până la care ajunge punctul material față de punctul de lansare y_0 :

$$y = -5 \cdot 40^2 + 400 \cdot 40 = 8000 \text{ m}$$

La sfârșitul mișcării (urcare și coborâre) $y=0$, iar ecuația mișcării punctului material devine:

$$-5t^2 + 400t = 0$$

$$t(-5t + 400) = 0$$

Ecuția de gradul doi are două soluții, t_1 și t_2 :

$$t = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \text{ momentul inițial,}$$

$$5t + 400 = 0 \Rightarrow t_2 = 80 \text{ s momentul final}$$

Punctul material revine pe pământ după 80 s de la lansare.

Viteza cu care punctul atinge pământul ($t = 80$ s) este

$$v = a \cdot t = g \cdot t$$

$$v = 10 \cdot 40 = 400 \text{ m/s}$$

Coborârea punctului este o mișcare accelerată, la coborâre, fără viteză inițială.

Problema 4. Un tren care are viteza de 135 km/h este frânat. După 10 s din momentul frânării, trenul s-a oprit. Ce distanță a parcurs trenul din momentul când a fost frânat până s-a oprit?

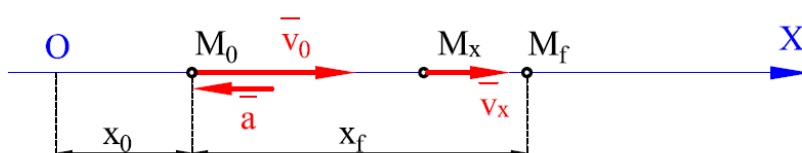


Figura 2.6

Axa OX este traiectoria trenului.

Trenul, la momentul de timp inițial, t_0 , are viteza inițială v_0 și se găsește în poziția M_0 .

Trenul, la momentul de timp t_x , are viteza v_x și se găsește în punctul M_x .

Trenul, pentru că este frânat, are o mișcare uniform decelerată (sensul accelerației are sens invers vitezei).

Legea mișcării trenului este:

$$x = -\frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0$$

unde

a este accelerația de frânare (accelerația are sens invers mișcării),

t este timpul,

v_0 este viteza inițială a trenului,

x_0 este distanța parcursă de tren la momentul de timp t_0 .

Știind că $x_0 = 0$ și $v_0 = 135$ km/h, rezultă

$$v_0 = 135 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{135 \cdot 1000}{3600} = 37,5 \text{ m/s}$$

Deci, legea mișcării trenului este:

$$x = -\frac{a}{2}t^2 + 37,5t$$

Expresia vitezei trenului este:

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$v = -at + 37,5$$

$$v = 0 \text{ pentru } t_f = 10 \text{ s}$$

$$-10a + 37,5 = 0 \Rightarrow 10a = 37,5 \Rightarrow a = 3,75 \text{ m/s}^2$$

$$x = -3,75t^2 + 37,5t$$

$$t = 10 \text{ s} \Rightarrow x_f = -\frac{3,75}{2}10^2 + 37,5 \cdot 10 \Rightarrow x_f = 187,5 \text{ m}$$

x_f este distanța parcursă de tren până la oprire.

Problema 5. Roata unui motor are o mișcare de rotație uniformă, cu turația $n=1200$ rpm, până în momentul în care este frânată. Din momentul frânării roata se mișcă uniform încetinit și se oprește după 8 s. Se cere:

- viteza unghiulară a discului până în momentul când începe frânarea, notată ω_0 ,
- accelerația unghiulară a discului în timpul frânării.
- viteza și accelerația unui punct de pe disc, notat cu P, aflat la raza $R=23$ cm, la timpul $t=4$ s de la începutul frânării.

Rezolvare

- Viteza unghiulară a discului până în momentul când începe frânarea este

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30} = \frac{\pi \cdot 1200}{30} = 40\pi \text{ s}^{-1} = 125,66 \text{ s}^{-1}$$

n este turația motorului, în rotații pe minut.

- b) Accelerația unghiulară a discului în timpul frânării se determină pornind de la ecuația mișcării de rotație:

$$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

unde

ω_0 este viteza unghiulară a discului (până în momentul când începe frânarea),

φ este unghiul parcurs până la momentul de timp t ,

ε este accelerația unghiulară,

φ_0 este unghiul inițial de la care se analizează mișcarea de rotație.

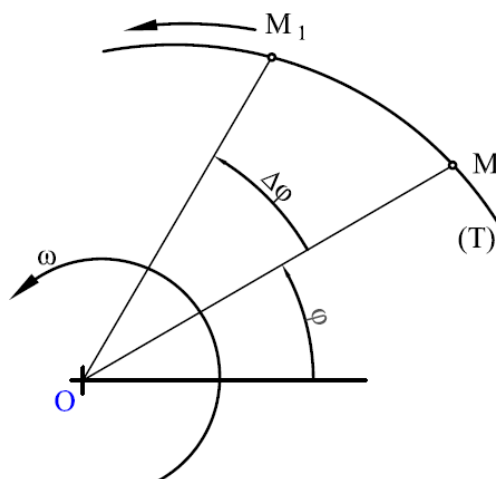


Figura 2.7

În figura 2.7 este dată variația unghiului de poziție, $\Delta\varphi$, din poziția M în poziția M1 (traectoria este un cerc, $\Delta\varphi$ este variația unghiului de poziție la rotirea din punctul M în punctul M1).

φ este unghiul de poziție a roții motorului la momentul de timp t ,

ε este accelerația unghiulară a roții motorului,

φ_0 este unghiul inițial de poziție a punctului M de pe roata motorului la momentul de timp t_0 ,

t este timpul,

t_f este momentul final, când roata se oprește,

ω este viteza unghiulară la momentul t .

$$t_f = 8 \text{ s}$$

$$\omega_0 = 40 \pi$$

$$\omega_f = -\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$\omega_f = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0 \right)$$

$$\omega_f = -\frac{1}{2} \cdot 2\varepsilon t + 40\pi + 0$$

$$\omega_f = -\varepsilon t + 40\pi$$

$$\omega_f = 0 \text{ (roata se oprește)}$$

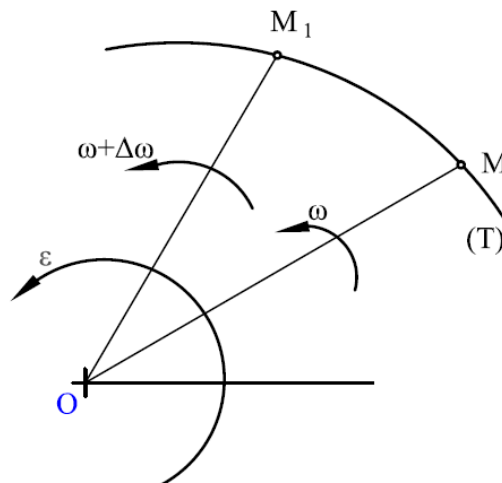


Figura 2.8

În Figura 2.8 este dată variația vitezei unghiulare din poziția M în poziția M1 (traiectoria este un cerc, $\Delta\varphi$, variația unghiului de poziție la deplasarea din punctul M în punctul M1.)

$$\varepsilon = \frac{-\omega - 40\pi}{8} \text{ s}^{-2}$$

$$\varepsilon = \frac{0 - 40\pi}{8} = -5\pi = 15,70 \text{ s}^{-2}$$

- c) Viteza și accelerația unui punct de pe roată, aflat la raza $R=23$ cm, la timpul $t_1=4$ s de la începutul frânării, este

$$\varphi = -\frac{1}{2}(-5\pi)t^2 + 40\pi t$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(-\frac{5}{2}\pi t^2 + 40\pi t\right)$$

$$\omega = -5\pi t + 40\pi$$

$$\text{Pentru } t_1 = 4 \text{ s} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = -\frac{5}{2}\pi \cdot 4^2 + 40\pi \cdot 4 = 120\pi \text{ rad} \\ \omega_1 = -5\pi \cdot 4 + 40\pi = 20\pi \text{ s}^{-1} \\ \varepsilon_1 = -5\pi \text{ s}^{-2} \end{cases}$$

- $s = R\varphi$ este arcul parcurs de punctul material până la momentul cerut
- φ este unghiul parcurs de punctul P (în radiani), până la momentul cerut.

$$v_P = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$v_P = R_P \dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

La momentul de timp $t_1 = 4$ s, viteza punctului P este:

$$v_P = \omega_1 \cdot R_P$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} = R_P \dot{\omega} = R_P \varepsilon$$

a_τ este accelerația tangențială

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{R_p^2 \omega^2}{R_p} = R_p \omega^2$$

a_n este accelerația pe direcția radială (normală la traiectorie).

Rezultanta acestor două accelerații, a_τ și a_n este:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Înlocuind relația $a_\tau = R\varepsilon$ și relația $a_n = R\omega^2$ în relația $|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ se obține accelerația punctului P, care se găsește la raza R_p .

$$|\bar{a}|_P = \sqrt{(R\varepsilon)^2 + (R\omega^2)^2}$$

$$|\bar{a}|_P = \sqrt{R^2(\varepsilon)^2 + R^2(\omega^2)^2}$$

$$|\bar{a}|_P = R\sqrt{(\varepsilon)^2 + (\omega^2)^2}$$

Viteza punctului P, situat la $R_p=0,023$ m față de axa de rotație, la momentul t_1 , caracterizat prin $\omega_1 = 20\pi$ este:

$$v_P = \omega_1 \cdot R_p = 20\pi \cdot 0,023 = 1,44 \text{ m/s}$$

$$a_P \begin{cases} a_\tau = R_p \cdot \varepsilon_1 = 0,023 \cdot (-5\pi) = 0,36 \text{ rad/s}^2 \\ a_n = R_p \cdot \omega_1^2 = 0,023 \cdot (20\pi)^2 = 90,80 \text{ rad/s}^2 \end{cases}$$

Problema 6. Care sunt parametrii cinematici ai mișcării punctului M în spațiu, definiți prin coordonată intrinsecă, știind că poziția inițială este în punctul M_0 ? Punctul O are un reper fix. Dar dacă punctul M are o mișcare circulară, care sunt parametrii cinematici?

Rezolvare

Ecuția mișcării punctului M este:

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}[s(t)]$$

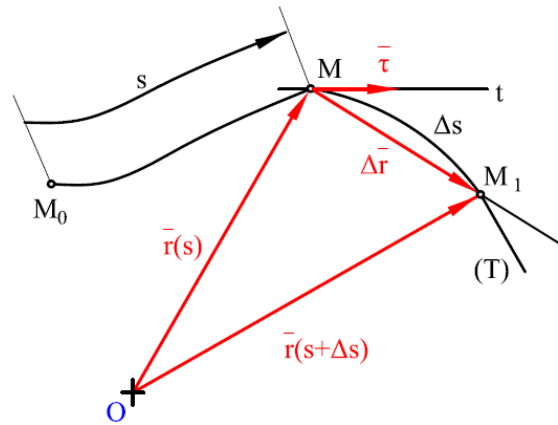


Figura 2.9

Relația $\vec{r} = \vec{r}(s) = \vec{r}[s(t)]$ reprezintă vectorul de poziție față de reperul fix O.

S este spațiul parcurs pe orizontală,

$s(t)$ reprezintă legea de mișcare a punctului M sub formă intrinsecă.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} \cdot \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} \right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} \cdot \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} \right)$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s}$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} = \vec{\tau}$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = 1$$

Înlocuind relația $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} = \vec{\tau}$ și $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = 1$ în relația

$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}$ se obține

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau} \cdot 1 = \vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ este versorul tangentei traiectoriei în punctul M

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(s)$$

Dacă derivăm versorul tangentei în funcție de coordonata s, se obține:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{\tau}(s + \Delta s) - \vec{\tau}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s}$$

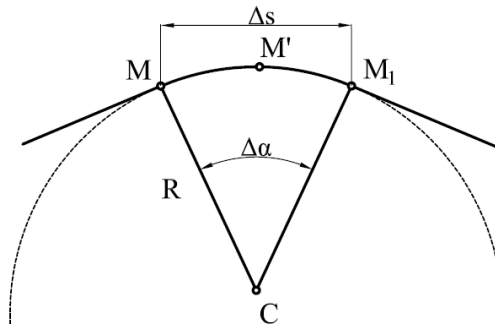


Figura 2.10

În Figura 2.10, arcul Δs este definit prin punctele M, M' și M₁. Punctul M are o traiectorie circulară, cu centrul în punctul C.

$$\widehat{MM_1} = \Delta\alpha \cdot R$$

unde

$\widehat{MM_1}$ este segment de curbă finit

$\Delta\alpha$ este arcul de cerc definit de acest segment de cerc

$$\Delta s = R \cdot \Delta\alpha$$

unde

R este raza cercului, traiectorie pentru punctul M

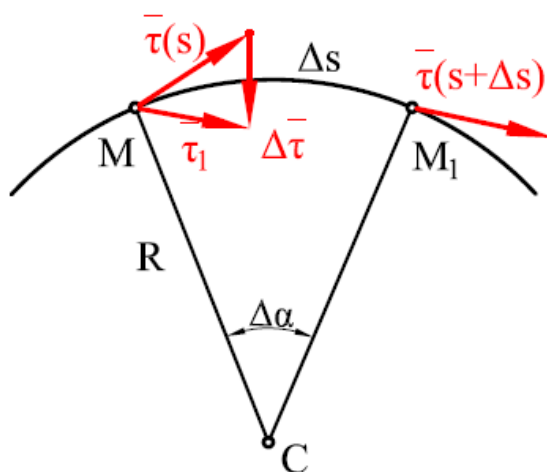


Figura 2.11

După cum se poate observa din Figura 2.11.

$$\tau(s) \perp CM$$

unde

$\tau(s)$ este versorul tangent la traiectoria reală în punctul M,
 CM și CM_1 sunt razele care delimitează arcul de cerc,

$$\tau(s + \Delta s) \perp CM_1$$

$\tau(s + \Delta s)$ este versorul tangent la traiectoria reală în punctul M_1 ,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \bar{\tau}}{|\Delta \bar{\tau}|} \cdot \frac{|\Delta \bar{\tau}|}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right)$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{|\Delta \bar{\tau}|} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{\tau}|}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s}$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{|\Delta \bar{\tau}|} = \bar{\tau}$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \bar{\tau}|}{\Delta s} = 1$$

Înlocuind pe $\Delta s = R \cdot \Delta \alpha$, se obține:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{R \cdot \Delta \alpha} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}$$

unde

\bar{v} este versorul normalei la traiectorie,

ρ este raza de curbură a traiectoriei ($(\rho = R)$),

Δs este arc finit pe traiectorie,

Δs devine ds ,

ds este arc infinitesimal, pe traiectorie circulară

Deci, se obține, în final, următoarea relație:

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{v}$$

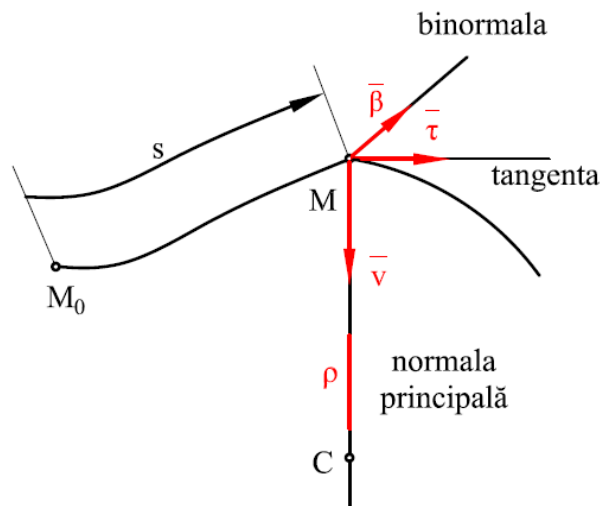


Figura 2.12 Triedrul Frenet

Triedrul Frenet este un triedru de referință, format din trei direcții perpendiculare. Cele trei direcții sunt: tangent la curbă în punctul M, normală principală (pe normală principală se află și centrul de curbură C) și tangenta binormală.

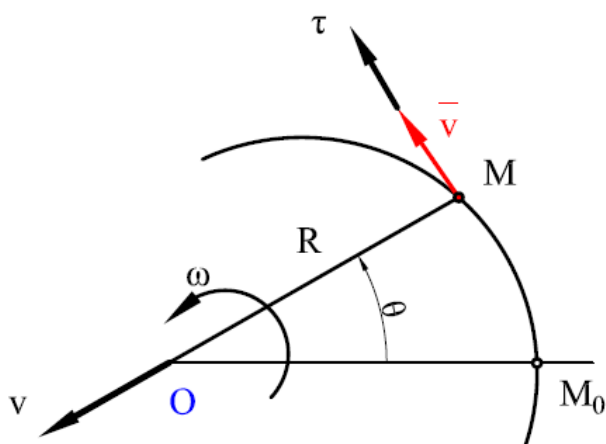


Figura 2.1

În Figura 2.13 este dată mișcarea circulară în coordonate intrinseci ale punctului M.

$$s = R\varphi$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$v = R\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$v_1 = \omega_1 \cdot R$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} = R\dot{\omega} = R\varepsilon$$

a_τ este accelerația tangențială

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2$$

a_n este accelerația normală pe direcție normală la traiectorie)

Accelerația punctului M este:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Înlocuind relația $a_\tau = R\varepsilon$ și relația $a_n = R\omega^2$ în relația $|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ se obține accelerația punctului P

$$|\bar{a}|_M = \sqrt{(R\varepsilon)^2 + (R\omega^2)^2}$$

$$|\bar{a}|_M = \sqrt{R^2(\varepsilon)^2 + (\omega^2)^2}$$

$$|\bar{a}|_M = R\sqrt{(\varepsilon)^2 + (\omega^2)^2}$$

Viteza punctului P situat la $R=0,023$ m față de axa de rotație este:

$$v_P = \omega \cdot R$$

$$a_M \begin{cases} a_\tau = R_M \cdot \varepsilon_1 \\ a_n = R_M \cdot \omega_1^2 \end{cases}$$

Problema 7. Volantul unui motor de rază $R=200$ mm se găsea în mișcare uniformă cu $n=150$ rpm în momentul când este frânat.

Din acel moment, volantul se mișcă astfel încât un punct A de pe periferia lui execută o mișcare circulară cu accelerația unghiulară ε constantă și se oprește la 5 s.

Se cere:

- viteza unghiulară a punctului A în momentul inițial,
- accelerația unghiulară a punctului A în momentul inițial,
- viteza unghiulară, viteza liniară și accelerația punctului A după 5 secunde de la frânare.

Rezolvare

Expresia vitezei unghiulare este:

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30}$$
$$\omega_0 = \frac{150 \cdot \pi}{30} = 15,7 \text{ rad/s}$$

ω_0 este viteza unghiulară la momentul de timp $t_0=0$ (inițial)

b) determinarea accelerației unghiulare punctului A în momentul inițial

Ecuția mișcării punctului A este:

$$\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$

unde

φ fiind unghiul parcurs până la momentul t ,

ω_0 este viteza unghiulară a discului (până în momentul când începe frânarea),

φ este mișcarea roții motorului la momentul de timp, t ,

ε este accelerația unghiulară a roții motorului,

φ_0 este mișcarea roții motorului la momentul de timp, t_0 ,
 t este timpul.

$$\varphi_0 = 0$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$\omega = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0 \right)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot 2\varepsilon_0 t + 15,7\pi + 0$$

$$\omega = \varepsilon_0 t + 15,7\pi$$

$$\omega = \varepsilon t + \omega_0$$

$$t = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 = 15,7 \text{ s}^{-1}$$

Deci

$$\omega = \varepsilon t + 15,7$$

La oprirea volantului, la $t=10$ s, avem $\omega_f = 0$, înlocuind, se obține

$$0 = \varepsilon \cdot 10 + 15,7 \Rightarrow \varepsilon \cdot 10 = -15,7 \Rightarrow \varepsilon = -1,57 \text{ rad/s}^2$$

Se calculează viteza unghiulară, viteza liniară și accelerația punctului A,
după 5 secunde de la frânare.

Se scrie relația pentru viteza unghiulară:

$$\omega = -\varepsilon t + \omega_0$$

$$\omega = -1,57t + 15,7$$

Pentru $t_1=5$ s, se obține:

$$s = R\varphi$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$v = R\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$v_A = \omega_1 \cdot R_A$$

$$a_{\tau A} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} = R_A \dot{\omega} = R_A \varepsilon$$

– a_{τ} este accelerația pe direcție tangențială

$$a_{n_A} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{R_A^2 \omega^2}{R_A} = R_A \omega^2$$

- a_n este accelerația pe direcție normală care coincide cu direcția radială,
- $|\bar{a}|$ este modulul vectorului accelerație,

$$|\bar{a}|_A = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Înlocuind relația $a_{\tau_A} = R_A \varepsilon$ și relația $a_{n_A} = R_A \omega^2$ în relația $|\bar{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ se obține accelerația punctului P

$$|\bar{a}|_A = \sqrt{(R_A \varepsilon)^2 + (R_A \omega^2)^2}$$

$$|\bar{a}|_A = \sqrt{R_A^2 (\varepsilon)^2 + (\omega^2)^2}$$

$$|\bar{a}|_A = R_A \sqrt{(\varepsilon)^2 + (\omega^2)^2}$$

$$\omega = -1,57 \cdot 5 + 1,57 \Rightarrow \omega = -7,85 \text{ rad/s}$$

$$v = R_A \cdot \omega = 200 \cdot 7,85 = 1570 \text{ mm/s} = 1,57 \text{ m/s}$$

$$a_{\tau_A} = R_A \cdot \varepsilon = -200 \cdot (-1,57) = 314 \text{ mm/s}^2 = 0,314 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = R_A \cdot \omega^2 = 200 \cdot (-7,85)^2 = 12324,5 \text{ mm/s}^2 = 12,3245 \text{ m/s}^2$$

$$a = 200 \sqrt{(-1,57)^2 + (-7,85)^2} = 1601,09 \text{ mm/s}^2 = 1,60 \text{ m/s}^2$$

Problema 8. Volantul unui motor de rază $R = 150 \text{ mm}$ se găsea în mișcare uniformă cu $n = 100 \text{ rpm}$ în momentul când este frânat. Din acel moment, volantul se mișcă astfel încât un punct A de pe periferia lui execută o mișcare circulară cu accelerația unghiulară constantă, $\varepsilon = ct$, și se oprește la 8 s.

Se cere:

- viteza inițială a punctului A;
- accelerația unghiulară a punctului A (se consideră uniformă);
- viteza unghiulară, liniară și accelerația punctului A, după 8 s de la frânare;
- numărul de rotații pe care le face roata din momentul când a fost frânată până s-a oprit.

Rezolvare

- viteza inițială a punctului A

$$\omega_A = \frac{\pi n}{30}$$

unde

- n este turația motorului, în rpm

$$\omega_{A_0} = \frac{\pi \cdot 100}{30} = 10,47 \text{ rad/s}$$

- ω_A este viteza unghiulară a volantului motorului (înainte de frânare), inclusiv a punctului A de pe volant,
- b) se calculează accelerația unghiulară a punctului A în momentul inițial

Ecuția mișcării punctului A, exprimată prin unghiul de poziție φ_A este: sensul de deplasare a punctului considerându-se pozitiv

$$\varphi_A = -\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_{A_0}t + \varphi_0$$

unde

ω_0 este viteza unghiulară a volantului (până în momentul când începe frânarea, considerată constantă),

φ este unghiul de poziție a punctului A al volantului motorului la momentul de timp t ,

ε este accelerația unghiulară a volantului motorului, inclusiv a punctului A, $\varepsilon = ct$,

φ_0 este poziția unghiulară a volantului motorului la momentul de timp t_0 ,

t este timpul.

$\varphi_0 = 0$ (la momentul de timp inițial, $t=0$)

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$\omega = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0 \right)$$

$$\omega = -\varepsilon t + \omega_0$$

$$\omega = -\frac{1}{2} \cdot 2\varepsilon_0 t + 10,47$$

$$\omega = -\varepsilon_0 t + 10,47$$

$$t = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0 = 10,47 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Deci,

$$\omega = -\varepsilon_0 t + 10,47$$

La oprirea roții, după $t=8$ s, avem $\omega_f = 0$ și, înlocuind în relația vitezei unghiulare, $\omega = -\varepsilon t + \omega_0$, se obține

$$0 = \varepsilon_0 \cdot 8 + 10,47$$

$$\varepsilon_0 \cdot 8 = -10,47$$

$$\varepsilon_0 = -1,31 \text{ rad/s}^2$$

În acest caz, ε are valoare negativă deoarece mișcarea este decelerată.

c) $\omega = \varepsilon_1 t + \omega_0$

$$\omega = -1,31t + 10,47$$

$$t = 28 \text{ s} \rightarrow \omega = 26,21 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$s = R\varphi$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$v = R\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$v_1 = \omega_1 \cdot R_P$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} = R_P \dot{\omega} = R_P \varepsilon$$

- a_τ este accelerația pe direcție tangențială

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{R_P^2 \omega^2}{R_P} = R\omega^2$$

- a_n este accelerația normală pe traiectorie, care este circulară, deci pe direcție radială

$$|\bar{a}|_P = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

- $|\bar{a}|$ este modulul vectorului accelerație

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Înlocuind relația $a_t = R_P \varepsilon$ și relația $a_n = R_P \omega^2$ în relația $|\bar{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ se obține accelerația punctului P

$$|\bar{a}|_P = \sqrt{(R_P \varepsilon)^2 + (R_P \omega^2)^2}$$

$$|\bar{a}|_P = \sqrt{R_P^2 (\varepsilon)^2 + R_P^2 (\omega^2)^2}$$

$$|\bar{a}|_P = R_P \sqrt{(\varepsilon)^2 + (\omega^2)^2}$$

$$v = 150 \cdot (26,21) = 3931,5 \text{ mm/s} = 3,9315 \text{ m/s}$$

$$a_t = R_P \cdot \varepsilon = 150 \cdot (1,31) = -196,5 \text{ mm/s}^2 = -0,1965 \text{ m/s}^2$$

$$a_v = R_P \cdot \omega^2 = 150 \cdot (-26,21)^2 = -103044,62 \text{ mm/s}^2 = -103,04462 \text{ m/s}^2$$

$$|\bar{a}|_P = 150 \sqrt{(-26,21)^2 + (-1,31)^2} = 3936,41 \text{ mm/s}^2$$

$$a = 3,936 \text{ mm/s}^2$$

CAPITOLUL 3. DINAMICA

Problema 1. Să se calculeze momentul de inerție polar și modulul de rezistență polar și axial al secțiunii din Figura 3.1, cu diametrul $d=5$ mm.

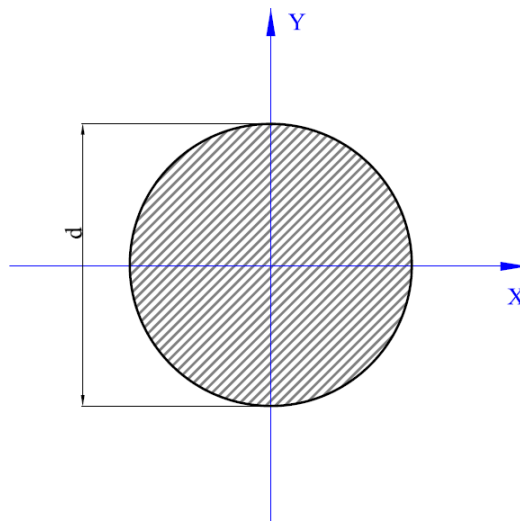


Figura 3.1

Rezolvare

Pentru a rezolva problema, să recapitulăm noțiunea de moment de inerție al unei secțiuni plane, ținând seama de notațiile din Figura 3.2.

În Figura 3.2 este dată o suprafață plană de arie A , pe care se consideră un element infinit mic de arie dA , situat la distanța y față de axa OZ și la distanța z față de axa OY .

unde

- ZOY este sistemul de axe ortogonal,
- C este centrul de greutate al suprafeței A ,
- r este raza de proiecție a elementului de arie dA ,
- z este abscisa,
- y este ordonata.

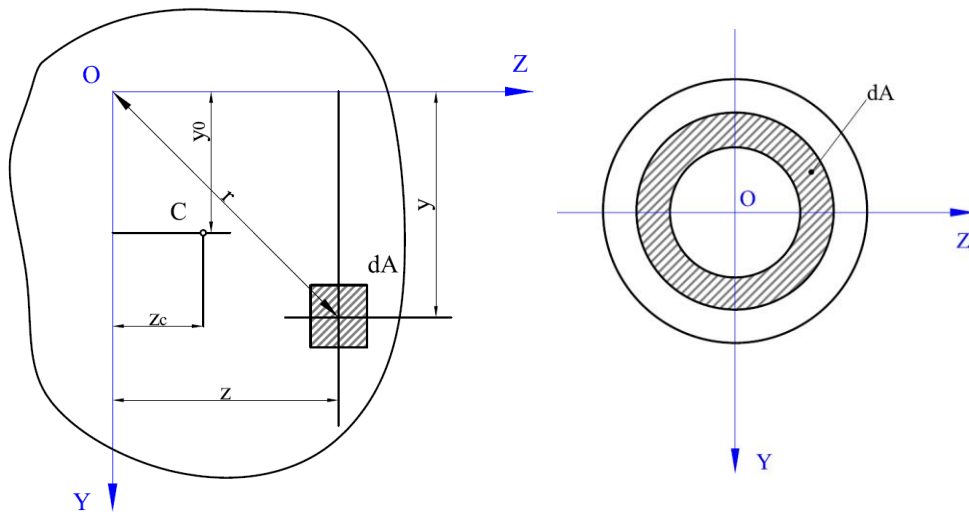


Figura 3.2. Momentul de inerție polar

Cu notațiile din Figura 3.2, momentul de inerție polar, față de punctul O, se calculează cu relația:

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA$$

unde

I_p este momentul de inerție polar al secțiunii A, față de punctul O,

dA este elementul de suprafață al secțiunii,

r este distanța de la polul O la elementul de arie dA .

Dacă înlocuim relația $r^2 = z^2 + y^2$ în relația $I_p = \int_A r^2 \cdot dA$, se obține:

$$I_p = \int_A (z^2 + y^2) dA$$

$$I_p = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA =$$

unde

$$\int_A y^2 dA = I_z$$

I_z este momentul de inerție axial al suprafeței A în raport cu axa OZ,

și este întotdeauna pozitiv,

y este distanța de la elementul de arie dA la axa OZ,

$$\int_A z^2 dA = I_y$$

I_y este momentul de inerție axial al suprafeței A în raport cu axa OY , și este întotdeauna pozitiv,

z este distanța de la elementul de arie dA la axa OY .

În calcularea acestor caracteristici, dimensiunile lungimilor se introduc în aceeași unitate de măsură, de exemplu, în mm sau m.

Dacă înlocuim relația $\int_A z^2 dA = I_z$ și relația $\int_A y^2 dA = I_y$ în relația $I_p = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA$, se obține:

$$I_p = I_x + I_y$$

Pentru un cerc, aria elementului de arie infinit mică, dA , se poate calcula ca arie a unui sector de cerc de rază r și de lățime infinit mică, dr (Figura 3.2b).

Prin desfășurare, acest sector de cerc devine un dreptunghi de lungime $2\pi r$ și lățime dr .

Se poate considera:

$$dA = 2\pi r dr$$

$$I_p = \int_A r^2 dA$$

$$I_p = \int_0^r r^2 2\pi r dr = \int_0^r 2\pi r^3 dr$$

$$I_p = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^r = \frac{\pi r^4}{2} \Big|_0^r$$

$$r = \frac{d}{2}$$

d fiind diametrul

$$I_p = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^{\frac{d}{2}} = \pi \frac{d^4}{2}$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

Înlocuim diametrul, $d=5$ mm, și se obține valoarea pentru momentul de inerție polar.

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \rightarrow I_p = \frac{\pi 5^4}{32} = 61,36 \text{ mm}^4$$

Calculul modulului de rezistență polar se face astfel: modulul de rezistență polar al secțiunii din Figura 3.2, prin definiție, este raportul, $W_p = \frac{I_p}{r}$, pentru suprafețe circulare.

unde

I_p este momentul de inerție polar al secțiunii A

$$W_p = \frac{I_p}{r}$$
$$r = \frac{d}{2}$$

Înlocuim relația $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ și relația $r = \frac{d}{2}$ în relația $W_p = \frac{I_p}{r}$ și se obține

$$W_p = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{2}{d}$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

$$W_p = \frac{\pi 5^3}{16} = 24,52 \text{ mm}^3$$

Calculul modulului de rezistență axial W_z

$$W_z = \frac{I_z}{r}$$

$$W_z = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{r} = \frac{d}{2}$$

$$W_p = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32} \cdot \frac{2}{d}$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

Înlocuind cu valoarea diametrului ($d=5$ mm), se obține valoarea modului de rezistență față de axa OZ.

Pentru o secțiune circulară

$$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$W_z = W_y = \frac{\pi 5^3}{32} = 12,27 \text{ mm}^3$$

Problema 2. Să se calculeze momentul de inerție polar și axial al secțiunii din Figură 3.3, cu $d_i=7$ mm, $d_e=15$ mm.

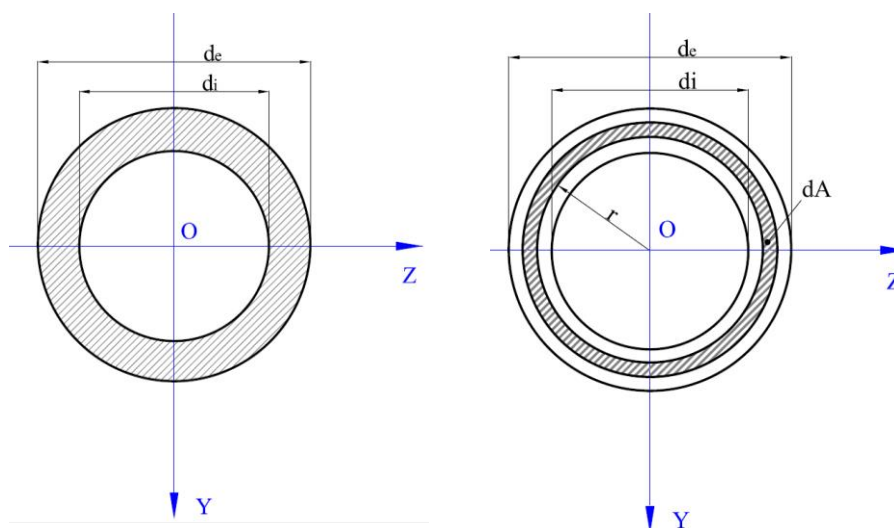


Figura 3.3.

Secțiunea din Figura 3.3 este un sector de cerc, caracteristică tuburilor, bușelor și țevilor.

dA este aria elementului de arie infinit mic, cu raza r și lățimea dr

$$dA = 2\pi r dr$$

Se calculează prima dată momentul de inerție polar al cercului cu diametru d_e .

$$I_{pe} = \int_A r_e^2 dA_e$$

$$I_{pe} = \int_A r_e^2 2\pi r_e dr_e = 2\pi \frac{r_e^4}{4} \Big|_0^{r_e} = \frac{\pi r_e^4}{2} \Big|_0^{r_e}$$

$$r_e = \frac{d_e}{2}$$

$$I_{pe} = 2\pi \frac{r_e^4}{4} \Big|_0^{\frac{d_e}{2}} = \pi \frac{\frac{d_e^4}{2^4}}{2} = \pi \frac{d_e^4}{2 \cdot 16} = \frac{\pi d_e^4}{2 \cdot 16}$$

$$I_{pe} = \frac{\pi d_e^4}{32}$$

Se calculează momentul de inerție polar al cercului cu diametru d_i ,

$$dA_i = 2\pi r_i dr_i$$

dA este aria elementului cu raza r_i .

$$I_{pi} = \int_A r_i^2 dA_i$$

$$I_{pi} = \int_A r_i^2 2\pi r_i dr_i$$

$$I_{pi} = 2\pi \frac{r_i^4}{4} \Big|_0^{r_i} = \frac{\pi r_i^4}{2} \Big|_0^{r_i}$$

$$r_i = \frac{d_i}{2}$$

$$I_{pi} = 2\pi \frac{r_i^4}{4} \Big|_0^{\frac{d_i}{2}} = \pi \frac{\frac{d_i^4}{2^4}}{2}$$

$$I_{pi} = \pi \frac{\frac{d_i^4}{16}}{2} = \frac{\pi d_i^4}{2 \cdot 16}$$

$$I_{pi} = \frac{\pi d_i^4}{32}$$

Pentru a calcula momentul de inerție polar al secțiunii hașurate (a sectorului de cerc) se scade momentul de inerție polar al cercului cu diametru d_i din momentul de inerție polar al cercului cu diametru d_e .

$$I_p = I_{pe} - I_{pi}$$

$$I_{pe} = \frac{\pi d_e^4}{32}$$

$$I_{pi} = \frac{\pi d_i^4}{32}$$

$$I_p = \frac{\pi(d_e^4 - d_i^4)}{32}$$

$$I_p = \frac{\pi(15^4 - 7^4)}{32} = 4734,38 \text{ mm}^4$$

Modulul de rezistență polar al secțiunii hașurate (inelare) este:

$$W_p = \frac{I_p}{r_{\max}}$$

$$r_{\max} = \frac{d_2}{2}$$

$$W_p = \frac{\pi(d_e^4 - d_i^4)}{16d_e}$$

$$W_p = \frac{\pi(15^4 - 7^4)}{16 \cdot 15} = 327,25 \text{ mm}^3$$

Calculul modulului de rezistență axial pentru secțiunea inelară

$$W_y = W_z = \frac{I_z}{r_{\max}} = \frac{I_y}{r_{\max}}$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi(d_e^4 - d_i^4)}{32d_e}$$

$$W_z = \frac{\pi(15^4 - 7^4)}{32 \cdot 15} = 327,25 \text{ mm}^3$$

Problema 3. Se dă secțiunea pătrată din Figura 3.6, cu $l=15 \text{ mm}$. Se cere:

- aria secțiunii hașurate,
- distanța de la axa OX și distanța de la axa OY la punctele extreme ale secțiunii,
- momentul de inerție față de axa OX și momentul de inerție față de axa OY,
- modulul de rezistență față de axa OX și modulul de rezistență față de axa OY,

- e) raza de inerție a secțiunii din Figura 3.4 în raport cu axa OX și raza de inerție a secțiunii din Figura 3.4 în raport cu axa OY.

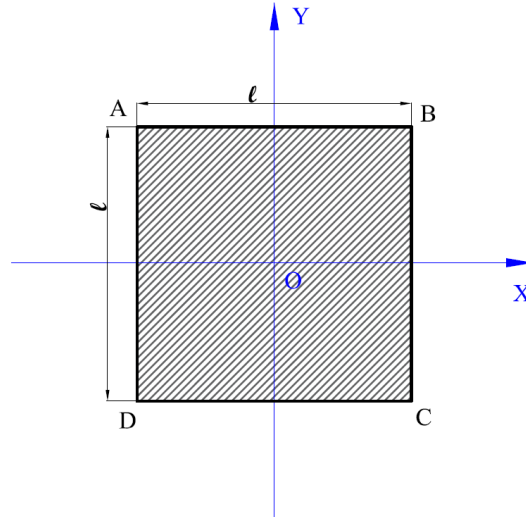


Figura 3.4.

Rezolvare

- a) aria secțiunii hașurate este aria unui pătrat.

$$A = l^2$$

$$A = 15^2 = 225 \text{ mm}^2$$

- b) distanța de la axa OX și distanța de la axa OY la punctele extreme ale secțiunii sunt

$$d_x = d_y = \frac{l}{2}$$

$$d_x = d_y = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ mm}$$

d_x este distanța de la axa OX la punctul extrem al secțiunii hașurate,

d_y este distanța de la axa OY la punctul extrem al secțiunii hașurate.

- c) calculul momentului de inerție față de axa OX și momentul de inerție față de axa OY:

Se consideră elementul de arie dA ca fiind un dreptunghi de lungime b ($b=ct$) și lățimea dy , și luat la distanța y față de axa OZ (Figura 3.5).

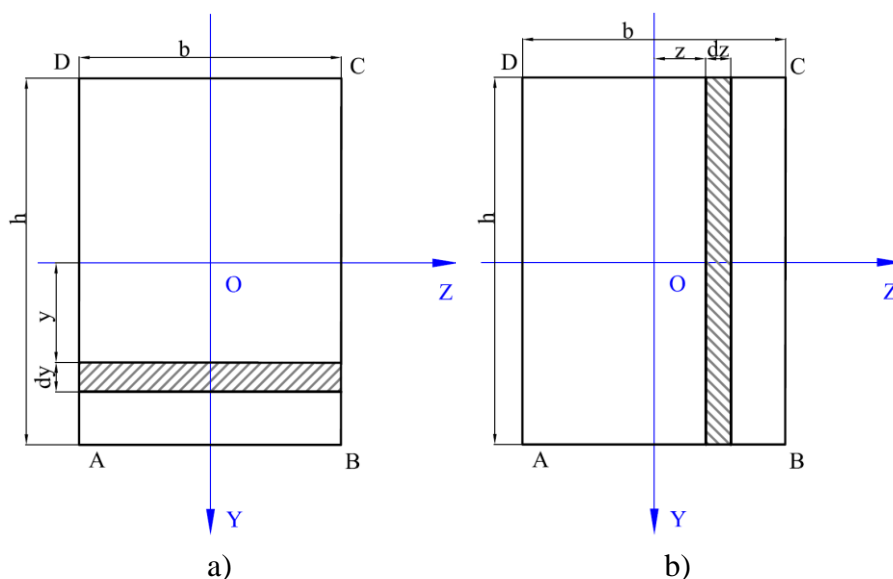


Figura 3.5. Suprafața dreptunghiulară

Pentru o secțiune dreptunghiulară de lățime b și lungime h , momentele de inerție axiale se calculează astfel:

Momentul de inerție axial al secțiunii hașurate ale elementului de arie $dA = bdy$ este dat de relația

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

unde

I_z este momentul de inerție axial al suprafeței A în raport cu axa OZ , în mm^4 și este întotdeauna pozitiv, y este distanța de la elementul de arie dA la axa OZ , distanță care se măsoară în mm.

$$I_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{by^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

Momentele de inerție axiale ale secțiunii hașurate ale elementului de arie $dA = hdx$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

unde

I_y este momentul de inerție axial al suprafeței A în raport cu axa OY, z este distanța de la elementul de arie dA la axa OY.

$$I_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 h dz = \frac{hz^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{hb^3}{12}$$

Suprafața este un pătrat, rezultă: $h = b = l$

$$I_z = I_y = \frac{l^4}{12}$$

$$I_z = I_y = \frac{15^4}{12} = \frac{50625}{12} = 4218,75 \text{ mm}^4$$

d) modulul de rezistență axial al secțiunii pătrate este

$$W_y = W_z = \frac{a^3}{6}$$

$$W_x = W_y = \frac{15^3}{6} = \frac{3375}{6} = 562,5 \text{ mm}^3$$

e) calculul razelor de inerție

Prin definiție, raza de inerție a unei secțiuni A, față de axa de coordonată, este

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Razele de inerție pentru o secțiune pătrată sunt egale:

$$r_x = r_y = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} =$$

$$r_x = r_y = \sqrt{\frac{4218,75}{225}} = \sqrt{18,75} \text{ mm}$$

$$r_x = r_y = 4,33 \text{ mm}$$

Problema 4. Se dă secțiunea din Figura 3.6, cu $a=25$ cm și $b=7$ cm. Se cere:

- aria secțiunii hașurate,
- distanțele de la axa OX și, respectiv, axa OY la punctele extreme ale secțiunii hașurate,
- momentul de inerție al secțiunii față de axa OX și, respectiv, axa OY,
- modulul de rezistență al secțiunii față de axa Ox și, respectiv, axa Oy,
- razele de inerție ale secțiunii în raport cu axa OX și raza de inerție a secțiunii în raport cu axa OY.

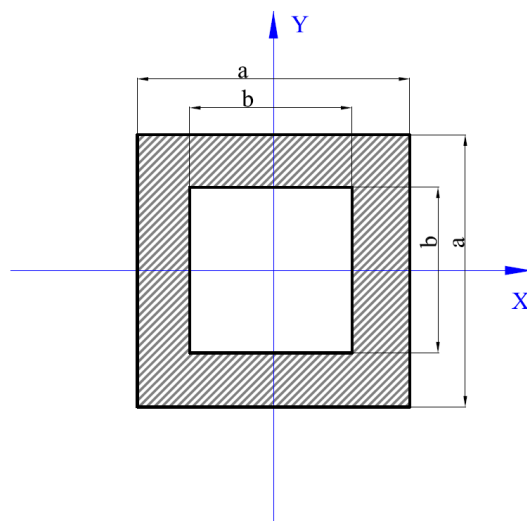


Figura 3.6.

Rezolvare

- a) Aria secțiunii hașurate, se calculează prin scăderea ariei pătratului mai mic (de latură b , notate cu A_i) din aria pătratului mai mare (de latură a , notate cu A_e)

$$A_e = a^2$$

A_e este aria secțiunii pătrate cu latura a

$$A_i = b^2$$

A_i este aria secțiunii pătrate cu latura b

$$A = A_e - A_i$$

$$A = a^2 - b^2$$

$$A = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576 \text{ cm}^2$$

- b) Distanța de la axa OX și distanța de la axa OY la punctele extreme ale secțiunii hașurate sunt egale (adică mărimea segmentului perpendicular pe OX și pe latura paralelă cu OX)

$$d_x = d_y = \frac{a}{2}$$

$$d_x = d_y = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ cm}$$

- c) Momentul de inerție al secțiunii hașurate față de axa OX și momentul de inerție față de axa OY se determină astfel:

- se calculează momentul de inerție al secțiunii pătrate exterioare cu latura a, față de axa OX și față de axa OY,
- se calculează momentul de inerție al secțiunii pătrate, cu latura b, față de axa OX și față de axa OY,
- se scade momentul de inerție al secțiunii pătrate cu latura b din momentul de inerție a secțiunii pătrate cu latura a, față de axa OX și față de axa OY.

Momentul de inerție față de axa OX va fi calculat astfel:

Momentul de inerție al secțiunii pătrate, cu latura a, față de axa OX este

$$I_{xe} = \frac{a^4}{12}$$

Momentul de inerție al secțiunii pătrate, cu latura b, față de axa OX este

$$I_{xi} = \frac{b^4}{12}$$

Momentul de inerție al secțiunii hașurate, notat cu I_x față de axa OX este

$$I_x = I_{xe} - I_{xi} = \frac{a^4 - b^4}{12}$$

$$I_x = I_{xe} - I_{xi} = \frac{25^4 - 7^4}{12} = \frac{390625 - 2401}{12} = \frac{388224}{12} = 32352 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerție al secțiunii pătrate, cu latura a, față de axa OY este

$$I_{ye} = \frac{a^4}{12}$$

Momentul de inerție al secțiunii pătrate, cu latura b, față de axa OY este

$$I_{yi} = \frac{b^4}{12}$$

Momentul de inerție al secțiunii hașurate notat cu I_y față de axa OY este

$$I_{ye} - I_{yi} = \frac{a^4 - b^4}{12}$$

$$I_{ye} - I_{yi} = \frac{25^4 - 7^4}{12} = \frac{390625 - 2401}{12} = \frac{388224}{12} = 32352 \text{ mm}^4$$

d) Modulul de rezistență al secțiunii hașurate față de axa OX și față de axa OY se determină astfel:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

$$W_y = \frac{I_z}{z_{\max}}$$

Pentru că secțiunea este un pătrat ($h=a=d$), momentele de inerție față de axa OX și față de axa OY sunt egale.

$$W_z = W_y = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6} = \frac{25^3}{6} = 2604,17 \text{ mm}^3$$

e) Calculul razei de inerție a secțiunii de arie A în raport cu axa OX și a razei de inerție a secțiunii de arie A în raport cu axa OY.

$$r_x = \sqrt{\frac{I_{xe} - I_{xi}}{A}}$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_{xe} - I_{xi}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{a^4}{12} - \frac{b^4}{12}}{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{\frac{25^4}{12} - \frac{7^4}{12}}{25^2 - 7^2}} = \sqrt{\frac{32352}{576}} = 7,49 \text{ mm}$$

Raza de inerție pentru secțiunea de arie A față de axa OX este

$$r_y = \sqrt{\frac{I_{ye} - I_{yi}}{A}}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_{ye} - I_{yi}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{a^4}{12} - \frac{b^4}{12}}{a^2 - b^2}}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{25^4}{12} - \frac{7^4}{12}} = \sqrt{\frac{32352}{576}} = 7,49 \text{ mm}$$
$$r_x = r_y = 7,49 \text{ mm}$$

Problema 5. Se dă secțiunea din Figura 3.7 cu următoarele dimensiuni: $a = 9 \text{ cm}$, $b = 17 \text{ cm}$. Se cere:

- aria secțiunii hașurate,
- distanța de la axa OX și distanța de la axa OY la punctele extreme ale secțiunii hașurate,
- momentul de inerție al secțiunii față de axa OX și axa OY,
- modulul de rezistență al secțiunii față de axa OX și axa OY,
- razele de inerție ale secțiunii în raport cu axa OX și raza de inerție a secțiunii în raport cu axa OY.

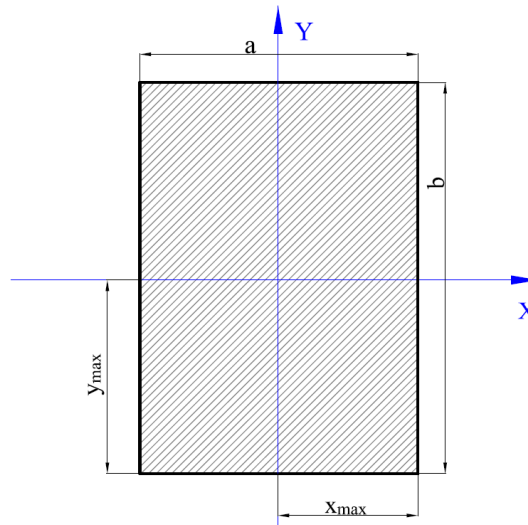


Figura 3.7

- Aria secțiunii hașurate (un dreptunghi)
 $A = ab$
 $A = 9 \cdot 17 = 153 \text{ cm}^2$

- b) Distanța de la axa OX și distanța de la axa OY la punctele extreme ale secțiunii hașurate

$$d_{(OY)} = \frac{a}{2}$$

$$d_{(OY)} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ cm}$$

$$d_{(OX)} = \frac{b}{2}$$

$$d_{(OX)} = \frac{17}{2} = 8,5 \text{ cm}$$

- c) Momentul de inerție față de axa OX și momentul de inerție față de axa OY

$$I_x = \frac{ab^3}{12}$$

$$I_x = \frac{9 \cdot 17^3}{12} = \frac{44217}{12} = 3684,75 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{ba^3}{12}$$

$$I_y = \frac{17 \cdot 9^3}{12} = \frac{12393}{12} = 1032,75 \text{ cm}^4$$

- d) Modulul de rezistență față de axa OX și modulul de rezistență față de axa OY

$$W_x = \frac{I_x}{d_{(OY)max}}$$

$$W_x = \frac{ab^2}{6}$$

$$W_x = \frac{9 \cdot 17^2}{6} = \frac{2601}{6} = 433,5 \text{ cm}^3$$

$$W_\Delta = \frac{I_y}{d_{(OX)max}}$$

$$W_y = \frac{ba^2}{6}$$

$$W_y = \frac{17 \cdot 9^2}{6} = \frac{1377}{6} = 229,5 \text{ cm}^3$$

Concluzie. Modulul de rezistență față de axe ale unei secțiuni dreptunghiulare sunt diferite. Dacă bara este solicitată, la încovoiere se obține o tensiune mai mică, dacă latura mai mare a dreptunghiului este pe direcția de aplicare a forței care determină încovoierea.

- e) Raza de inerție a secțiunii în raport cu axa OX se determină cu relația:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{ab^3}{12}}{ab}}$$
$$r_x = \sqrt{\frac{3684,75}{153}} = 4,90 \text{ cm}$$

Raza de inerție a secțiunii în raport cu axa OY se determină cu relația:

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{ba^3}{12}}{ab}}$$
$$r_y = \sqrt{\frac{1032,75}{153}} = 2,59 \text{ cm}$$

Problema 6. Se dă secțiunea din Figura 3.8 cu $a=25$ cm, $b=45$ cm și $c=35$ cm. Se cere:

- aria secțiunii hașurate,
- distanța de la axa OX și distanța de la axa OY la punctele extreme ale secțiunii hașurate,
- momentul de inerție al secțiunii față de axa OX și momentul de inerție al secțiunii față de axa OY;
- modulul de rezistență al secțiunii față de axa OX și modulul de rezistență al secțiunii față de axa OY;

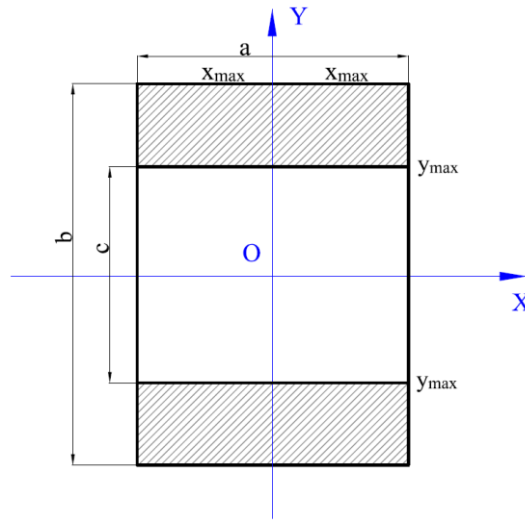


Figura 3.8

Pentru a determina aria secțiunii hașurate, se calculează aria dreptunghiului cu laturile a și b, din care se scade aria dreptunghiului cu laturile c și a.

$$A = ab - ac$$

$$A = a(b - c)$$

$$A = 25(45 - 35) = 25 \cdot 10 = 250 \text{ cm}^2$$

Distanța de la axa OX și distanța de la axa OY la punctele extreme ale secțiunii hașurate

$$d_{(OX)} = \frac{b}{2}$$

$$d_{(OX)} = \frac{45}{2} = 22,5 \text{ cm}$$

$$d_{(OY)} = \frac{a}{2}$$

$$d_{(OY)} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ cm}$$

Momentul de inerție a secțiunii hașurate față de axa OX și față de axa OY se determină astfel:

- se calculează momentul de inerție a secțiunii dreptunghiulare cu laturile a și b, față de axa OX și față de axa OY,

- se calculează momentul de inerție a secțiunii dreptunghiulare cu laturile c și a , față de axa OX și față de axa OY ,

- se scade momentul de inerție a secțiunii dreptunghiulare cu laturile c și a din momentul de inerție a secțiunii dreptunghiulare cu laturile a și b , rezultând momentul de inerție față de axa OX și, respectiv, momentul de inerție față de axa OY .

Momentul de inerție a secțiunii dreptunghiulare cu laturile a și b , față de axa OX , este

$$I_x = \frac{ab^3}{12}$$

unde

I_x este momentul de inerție axial al suprafeței cu laturile a și b , în raport cu axa OX

$$I_x = \frac{25}{12} 45^3 = 189843,75 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerție a secțiunii dreptunghiulare cu laturile c și a este față de axa OY

$$I'_x = \frac{ac^3}{12}$$

unde

I'_x este momentul de inerție axial al suprafeței cu laturile c și a , în raport cu axa OX

$$I'_x = \frac{25 \cdot 35^3}{12} = 89322,92 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerție al secțiunii hașurate față de axa OX a secțiunii hașurate este

$$I_{x_t} = I_x - I'_x = \frac{ab^3}{12} - \frac{ac^3}{12} = \frac{a(b^3 - c^3)}{12}$$

$$I_{x_t} = 189843,75 - 89322,92 = 100520,83 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerție al secțiunii dreptunghiulare cu laturile a și b față de axa OY este

$$I_y = \frac{ba^3}{12}$$

unde

- I_y este momentul de inerție axial al suprafeței cu laturile a și b , în raport cu axa OY

$$I_y = \frac{45 \cdot 25^3}{12} = 160781,25 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerție al secțiunii dreptunghiulare cu laturile c și a este față de axa OY

$$I'_y = \frac{ca^3}{12}$$

unde

I'_y este momentul de inerție axial al suprafeței cu laturile c și a , în raport cu axa OY

$$I'_y = \frac{35 \cdot 25^3}{12} = 45572,92 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerție față de axa OY a secțiunii hașurate este

$$I_{y_t} = I_y - I'_y = \frac{ba^3}{12} - \frac{ca^3}{12} = \frac{a^3(b-c)}{12}$$

$$I_{y_t} = 160781,25 - 45572,92 = 115208,33 \text{ cm}^4$$

Modulul de rezistență al secțiunii hașurate față de axa OX și, respectiv, față de axa OY se determină astfel:

$$W_x = \frac{I_{y_t}}{d_{(OY)_{max}}}$$

$$d_{(OY)_{max}} = \frac{b}{2}$$

$$W_x = \frac{100520,83}{\frac{45}{2}} = 4467,59 \text{ cm}^3$$

$$W_y = \frac{I_{y_t}}{d_{(OX)_{max}}}$$

$$d_{(OX)_{max}} = \frac{b}{2}$$

$$W_y = \frac{115208,33}{\frac{25}{2}} = 9216,66 \text{ cm}^3$$

Problema 7. Se dă secțiunea din Figura 3.9 cu, $a=60$ cm, $b=40$ cm, $c=120$ cm, $d=150$ cm. Se cere:

- aria secțiunii hașurate;
- distanța de la axa OX și distanța de la axa OY la punctele extreme ale secțiunii hașurate;
- momentul de inerție față de axa OX și momentul de inerție față de axa OY;
- modulul de rezistență față de axa OX și modulul de rezistență față de axa OY;

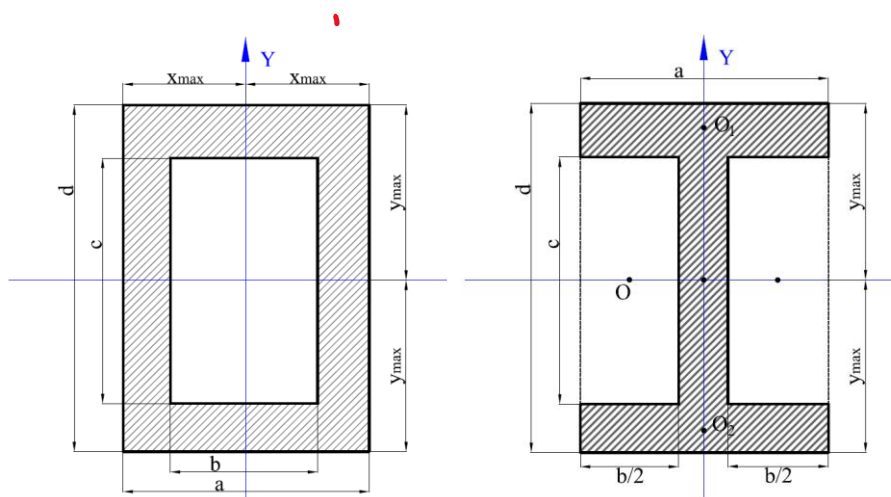


Figura 3.9

- Pentru a determina aria secțiunii hașurate, se calculează aria dreptunghiului cu laturile a și d , din care se scade aria dreptunghiului cu laturile a și b .

$$A = ad - bc$$

$$A = 60 \cdot 150 - 40 \cdot 120 = 9000 - 4800 = 4200 \text{ cm}^2$$

Distanța de la axa OX și distanța de la axa OY la punctele extreme ale secțiunii hașurate se determină astfel

- distanța de la axa OX la punctele extreme ale secțiunii cu laturile a și d este

$$d(y) = \frac{d}{2}$$

$$d(y) = \frac{150}{2} = 75 \text{ cm}$$

- distanța de la axa OX la punctele extreme ale secțiunii cu laturile b și c este

$$d(y) = \frac{c}{2}$$

$$d(y) = \frac{120}{2} = 60 \text{ cm}$$

- distanța de la axa OY la punctele extreme ale secțiunii cu laturile a și d este

$$d(x) = \frac{a}{2}$$

$$d(x) = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm}$$

- distanța de la axa OY la punctele extreme ale secțiunii cu laturile b și c este

$$d(x) = \frac{b}{2}$$

$$d(x) = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}$$

Momentul de inerție al secțiunii hașurate față de axa OX, $I_{x_{hos}}$, și momentul de inerție față de axa OY, $I_{y_{hos}}$, se determină astfel:

- se calculează momentul de inerție al secțiunii dreptunghiulare cu laturile A și B, față de axa OX și față de axa OY,
- se calculează momentul de inerție al secțiunii dreptunghiulare cu laturile b și a, față de axa OX și față de axa OY,
- se scade momentul de inerție al secțiunii dreptunghiulare cu laturile b și a din momentul de inerție al secțiunii dreptunghiulare cu laturile B și A, față de axa OX și față de axa OY.

Momentul de inerție a secțiunii dreptunghiulare cu laturile a și d față de axa OX este

$$I_x = \frac{ad^3}{12} \rightarrow$$
$$I_x = \frac{60 \cdot 150^3}{12} = 16875000 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerție a secțiunii dreptunghiulare cu laturile b și c față de axa OY este

$$I'_x = \frac{bc^3}{12}$$

$$I'_x = \frac{40}{12} 120^3 = 5760000 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerție a secțiunii hașurate față de axa OX este

$$I_x = \frac{a \cdot d^3}{12} - \frac{bc^3}{12}$$

$$I_x = 16875000 - 5760000 = 11115000 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerție al secțiunii dreptunghiulare cu laturile a și d față de axa OY este

$$I_y = \frac{da^3}{12}$$

unde

I_y este momentul de inerție axial al suprafeței cu laturile b și c , în raport cu axa OY

$$I_y = \frac{150}{12} 60^3 = 2700000 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerție a secțiunii dreptunghiulare cu laturile c și b este față de axa OY

$$I'_y = \frac{cb^3}{12}$$

unde

I'_y este momentul de inerție axial al suprafeței cu laturile a și b , în raport cu axa OY

$$I'_y = \frac{120 \cdot 40^3}{12} = 640000 \text{ cm}^4$$

Momentul de inerție față de axa OY a secțiunii hașurate este

$$I_y = \frac{da^3}{12} - \frac{cb^3}{12}$$

$$I_{y_{hos}} = 2700000 - 640000 = 2060000 \text{ cm}^4$$

b) Secțiunea B poate fi considerată ca fiind compusă astfel:

Varianta 1: secțiunea este formată din 3 arii, două dreptunghiuri cu laturile a și $(d - c)/2$ și un dreptunghi cu laturile c și $(a - b)$

$$I_{Bx} = I_{1x} + I_{2x} + I_{3x} = 2 \cdot I_{1x} + I_{3x}$$

$$I_{1x} = I_{1x(O1)} + d_1^2 \cdot A_1 = \left(\frac{d-c}{2}\right)^3 \cdot a \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{c+d}{4}\right)^2 \cdot a \cdot \frac{d-c}{2}$$

$$I_{1x} = \left(\frac{150-120}{2}\right)^3 \cdot 60 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{120+150}{4}\right)^2 \cdot 60 \cdot \frac{150-120}{2}$$

$$= 4201875 \text{ cm}^4$$

$$I_{3x} = \frac{c^3(a-b)}{12}$$

$$I_{3x} = \frac{120^3(60-40)}{12} = 2880000 \text{ cm}^4$$

$$I_{Bx} = 2 \cdot 4201875 + 2880000 = 11283750$$

$$I_{By} = I_{1y} + I_{2y} + I_{3y} = 2 \cdot I_{1y} + I_{3y}$$

$$I_{1y} = \frac{\frac{d-c}{2} a^3}{12}$$

$$I_{1y} = \frac{\frac{150-120}{2} 60^3}{12} = 270000 \text{ cm}^4$$

$$I_{3y} = \frac{c(a-b)^3}{12}$$

$$I_{3y} = \frac{120(60-40)^3}{12} = 80000$$

$$I_{By} = 2 \cdot 270000 + 80000 = 620000 \text{ cm}^4$$

Varianta 2: secțiunea rezultată prin scăderea celor două dreptunghiuri laterale din dreptunghiul mai mare, cu laturile a și d .

$$I_x = I_{1x} - 2I_{2x} = \frac{a \cdot d^3}{12} - 2 \frac{b}{2} \frac{c^3}{12}$$

$$I_x = \frac{60 \cdot 150^3}{12} - 2 \frac{\frac{40}{2} 120^3}{12} = 11115000 \text{ cm}^4$$

$$I_{y(OY)} = I_{1y} - 2I_{2y}$$

$$I_{1y} = \frac{d \cdot a^3}{12} = \frac{150 \cdot 60^3}{12} = 2700000 \text{ cm}^4$$

$$I_{2y} = c \left(\frac{b}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{a-b}{2} + \frac{b}{4}\right)^2 \cdot A_2$$

$$A_2 = c \cdot \frac{b}{2}$$

$$I_{2y} = 120 \left(\frac{40}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{60-40}{2} + \frac{40}{4}\right)^2 \cdot 120 \cdot \frac{40}{2} = 1040000 \text{ cm}^4$$

$$I_{y(OY)} = 2700000 - 2 \cdot 1040000 = 620000 \text{ cm}^4$$

Problema 8. Un șurub având pasul p , masa m și momentul de inerție al secțiunii față de axa I_z , se rotește într-o piuliță cu viteza unghiulară ω . Se cere energia cinetică E a șurubului la un moment dat.

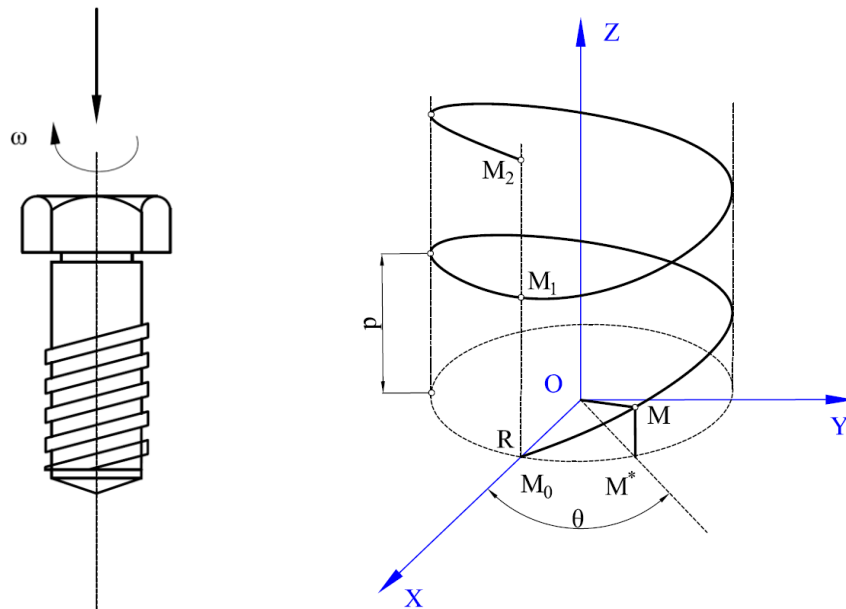


Figura 3.10

Pasul elicei șurubului este:

$$M_0M_1 = M_1M_2 = \dots = p = ct$$

Semnificația notațiilor din Figura 3.10 sunt:

- axa OX trece prin punctul M_0 ,
- axa OZ este axa corpului șurubului,
- R este raza cilindrului de rază OR,
- α este înclinarea traiectoriei elicoidale, care desfășurată, este o linie dreaptă, față de orizontală,
- θ este unghiul de poziție al punctului M^* față de axa OX.

Rezolvare

Dacă se desfășoară cilindrul pe care este spirala filetului, traiectoria este o linie dreaptă înclinată, cu unghiul, α , față de orizontală (planul XOY).

Punctul M are următoarele coordonate în sistemul cartezian:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = \lambda \theta = \frac{p}{2\pi} \theta \end{cases}$$

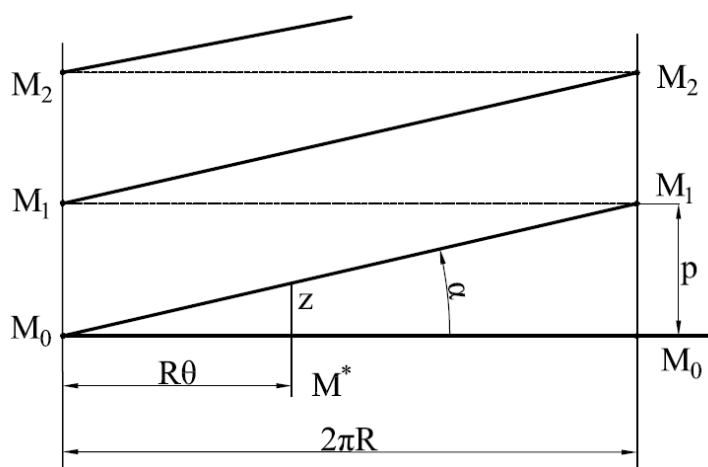


Figura 3.11. Desfășurata traiectoriei punctului M pe filet

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{z}{R\theta} = \frac{p}{2\pi R}$$

Proiecțiile vitezei punctului M sunt

$$v_x = \dot{x} = -R\dot{\theta} \sin \theta$$

$$v_y = \dot{y} = R\dot{\theta} \cos \theta = R\omega \cos \theta$$

$$v_z = \dot{z} = \lambda \dot{\theta} = \lambda \omega = \frac{p}{2\pi} \omega$$

Punctul M de pe șurub are o mișcare elicoidală
Energia cinetică a șurubului în rotație este:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

unde

m este masa șurubului,

v_0 este viteza șurubului pe direcția OZ considerată constantă,

ω este viteza unghiulară a punctului M,

I_z este momentul de inerție axial față de axa OZ.

Considerând relația dintre v_0 și ω , se obține:

$$v_0 = v_z = \frac{p\omega}{2\pi}$$

unde

v_0 este viteza șurubului pe direcția OZ considerată constantă,

p este pasul șurubului,

ω este viteza unghiulară.

$$I_z = mR^2$$

– I_z este momentul masic de inerție.

Înlocuim relația $v_0 = v_z = \frac{p\omega}{2\pi}$ și relația $I_z = mR^2$ în relația $E = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2$ se obține:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{p\omega}{2\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{m p^2 + 4mR^2 \pi^2}{8\pi^2} \omega^2 = \frac{m\omega^2}{8\pi^2} (p^2 + 4R^2 \pi^2)$$

Problema 9. Un scripete cu două roți solidare, cu razele $R_1 = 0,10$ m și $R_2 = 0,20$ m și un fus cu raza $r=0,02$ m servește la ridicarea greutăților. Admițând în lagăr un coeficient de frecare $\mu = 0,2$, se cere randamentul scripetelui, η , neglijând rigiditatea scripetelui.

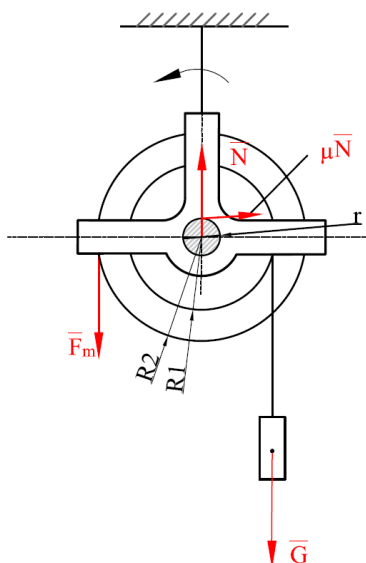


Figura 3.12

Rezolvare

Mișcarea greutății \bar{G} este uniformă dacă masa momentului față de centrul de rotație este zero și dacă suma forțelor de direcție verticală este zero

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0$$

$$\sum M_{(O)} = 0$$

Forțele pe direcție verticală își fac echilibru:

$$-F_m - G + N = 0$$

$$F_m + G = N$$

Momentele față de centrul de rotație O își fac echilibru.

$$-F_m R_2 + \mu N r + G R_1 = 0$$

$$0,2F_m + 0,2(G + F_m)0,02 + 0,1G = 0$$

$$-0,2F_m + 0,004G + 0,004F_m + 0,1G = 0$$

$$-0,196F_m = -0,104G$$

$$F_m = \frac{0,104G}{0,196} = 0,53G$$

F_m este forța cu care se acționează pe roata de rază R_2 pentru a ridica greutatea G .

Dacă se admite o rotire cu θ a sistemului cu scripetele, G urcă cu $R_1\theta$ și F_m coboară cu $R_2\theta$.

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} = \frac{G \cdot R_1\theta}{F_m \cdot R_2\theta} = \frac{0,10G}{0,53 \cdot G_0 \cdot 2\theta} = \frac{0,1}{0,106} = 0,943$$

Problema 10. Se consideră palanul diferențial din Figura 3.13. Se cunosc greutatețile G_1 și G_2 , ale celor două corpuri, momentul de inerție al palanului I_x față de centrul O și viteza lui unghiulară ω . Se neglijează frecarea. Se presupune că firele sunt inextensibile și nu alunecă pe scripete. Se cere momentul cinetic al sistemului față de punctul O și energia sa cinetică.

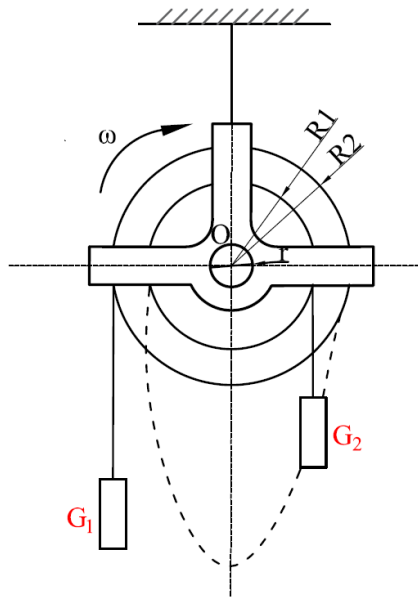


Figura 3.13

Rezolvare

Corpurile G_1 și G_2 se translatează pe verticală cu $v_1 = R_1\omega$ și respectiv $v_2 = R_2\omega$.

Impulsurile maselor 1 și 2 vor fi:

$$H_1 = M_1 v_1 = \frac{G_1}{g} R_1 \omega$$

$$H_2 = M_2 v_2 = \frac{G_2}{g} R_2 \omega$$

Momentele cinetice al maselor 1 și 2 față de centrul de greutate O și al sistemului G sunt:

$$K = \frac{G_1}{g} R_1 \omega + \frac{G_2}{g} R_2 \omega + I_x \omega$$

Energia cinetică este suma energiilor cinetice ale componentelor sistemului:

$$K = K_{G_1} + K_{G_2} + K_{\text{palanul}}$$

$$E = \sum_{i=1}^3 E_i = \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} (R_1 \omega)^2 + \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} (R_2 \omega)^2 + \frac{1}{2} I_x \omega^2$$

Problema 11. Pe o rampă de descărcare a ambalajelor dintr-o fabrică de conserve, înclinată față de orizontală cu un unghi $\alpha = 45^\circ$, se dă drumul unei lăzi, fără viteză inițială. În timpul deplasării ia naștere frecarea, caracterizată prin coeficientul de frecare $\mu = 0,3$. Se cere viteza pe care o va avea lada, după ce a parcurs o distanță $l=6$ m pe planul înclinat.

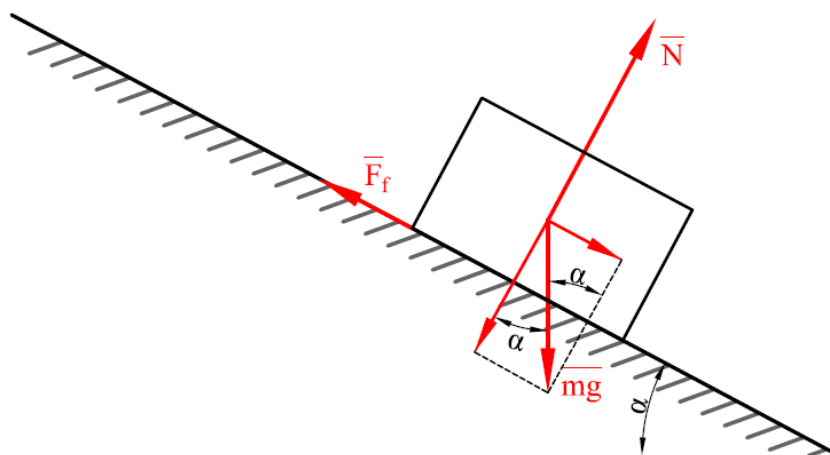


Figura 3.14

Rezolvare

Se aplică teorema fundamentală a dinamicii, pe direcția planului înclinat:

$$\bar{F} = m\bar{a}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot g \cdot \sin\alpha - F_f$$

unde: $F_f = \mu N = \mu \cdot G \cos\alpha = \mu mg \cos\alpha$, deoarece $G = mg$, g fiind accelerația gravitațională.

Se mai poate scrie teorema fundamentală astfel:

$$m \frac{dv}{dt} = mgsin\alpha - \mu mg \cos\alpha$$

Derivata vitezei în funcție de timp se poate scrie:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dx} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Ecuția diferențială devine:

$$dv = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)dx$$

Se integrează:

$$\int_0^v dv = \int_0^l g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)dx$$

se obține:

$$\frac{v^2}{2} = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha + C$$

Pentru $t_0 = 0$, $l = 0$ și $v = 0$, deci $C = 0$

Rezultă:

$$v = \sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

înlocuim cu datele numerice și se obține

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot 6(\sin 45^\circ - 0,3\cos 45^\circ)} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 6(0,71 - 0,3 \cdot 0,71)} \\ = 7,72 \text{ m/s}$$

Problema 12. O navetă cu borcane alunecă pe o pantă cu un unghi $\alpha = 30^\circ$, de la o înălțime $h=1$ m, coeficientul de frecare cu planul fiind $\mu = 0,2$. Se cere distanța x pe care o parcurge naveta până se oprește.

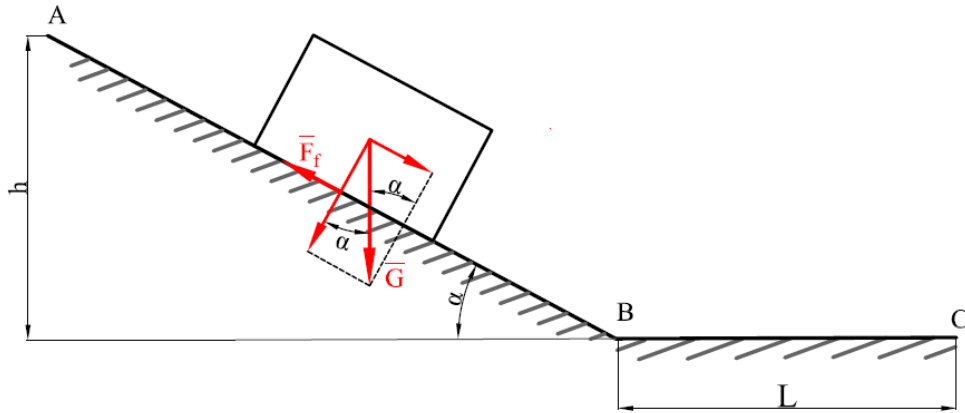


Figura 3.15

Rezolvare

Mișcarea navei este compusă din:

- mișcarea pe plan înclinat (o mișcare uniformă accelerată); $AB = x_1$,
- mișcarea pe planul orizontal (mișcare uniform încetinită); $BC = x_2$.

Distanța parcursă până la oprire este:

$$x = x_1 - x_2$$

În intervalul A-B se aplică teorema conservării energiei

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = Gh - \mu G \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$v_A = 0$$

Se obține:

$$\frac{mv_B^2}{2} = Gh(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)$$

În intervalul B-C, aplicând tot teorema conservării energiei se obține:

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\mu Gx$$

$$v_C = 0$$

Egalând relațiile anterioare se obține:

$$\frac{mv_B^2}{2} = Gh(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha) = -\mu Gx_2$$

x_2 fiind spațiul parcurs pe planul orizontal.

Rezultă:

$$x_2 = \frac{h}{\mu} (1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)$$

Înlocuim cu datele numerice, se obține:

$$x = \frac{2}{0,2} (1 - 0,2 \operatorname{ctg} 45^\circ) = \frac{2}{0,2} (1 - 0,2 \cdot 1) = 8 \text{ m}$$

CAPITOLUL 4. ÎNTINDERE

Problema 1. Trei cabluri de lungime $L=4$ m fiecare sunt folosite pentru ridicarea unor greutăți. Fiecare cablu are 7 toroane (Figura 4.1) de câte 19 fire, fiecare fir având diametrul de 1,5 mm; materialul firelor are tensiunea admisibilă la rupere $\sigma_r = 110$ MPa. Punctele de prindere a greutății se înscriu într-un cerc cu raza $r=1200$ mm (Figura 4.2). Se cere greutatea maximă ce poate fi ridicată în această configurație. Cum se modifică greutatea care poate fi ridicată dacă punctele de prindere se înscriu într-un cerc cu raza $r=2000$ mm.

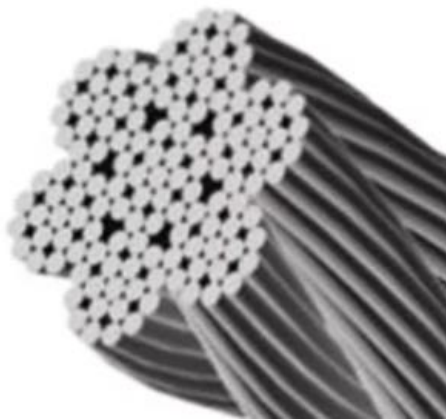


Figura 4.1

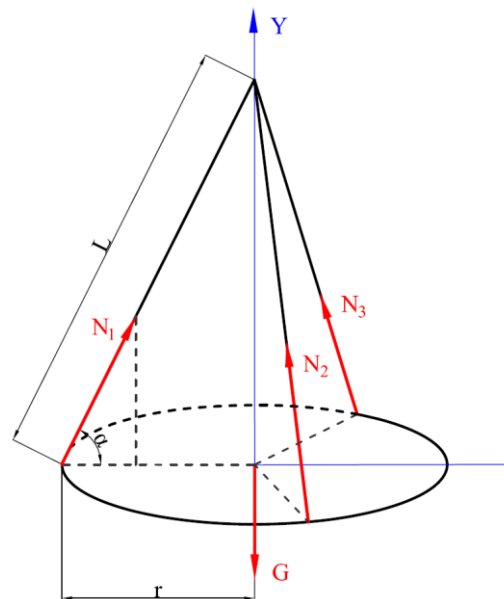


Figura 4.2

Rezolvare

Se notează forțele care apar în cabluri cu:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N$$

Se calculează unghiul format de cablu cu horizontala (unghiul α).

$$\cos \alpha = \frac{r}{L}$$

$$\cos \alpha = \frac{1200}{4000} = 0,3$$

$$L = 4 \text{ m} = 4000 \text{ mm}$$

$$\alpha = \arccos 0,3 = 72,54^\circ$$

Fie N_{max} sarcina maximă admisibilă pentru cablu:

$$N_{max} = \sigma_a \cdot A_{cablu}$$

$$A_{cablu} = n \cdot m \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

unde

A_{cablu} este aria cablului,

n reprezintă numărul de fire dintr-un toron,

m reprezintă numărul de toroane.

Aria unui fir este:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

în care d este diametrul unui fir.

$$A_{cablu} = 7 \cdot 19 \cdot \frac{\pi \cdot 1,5^2}{4} = 7 \cdot 19 \cdot 1,76 = 234,91 \text{ mm}^2$$

Înlocuim $A_{cablu} = 234,91 \text{ mm}^2$ și $\sigma_a = 110 \text{ MPa}$ în relația $N_{max} = \sigma_a \cdot A_{cablu}$ și se obține

$$N_{max} = 110 \cdot 234,91 = 25840,23 \text{ N} = 25,84023 \text{ kN}$$

Echilibrul forțelor pe direcție verticală se scrie:

$$\begin{aligned}N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha - G &= 0 \\3N \sin \alpha &= G \\G &= 3 \cdot N \sin \alpha \\G_{max} &= 3 \cdot N_{max} \cdot \sin \alpha \\G_{max} &= 3 \cdot 25840,23 \cdot \sin 72,54^\circ \\G_{max} &= 3 \cdot 25840,23 \cdot 0,9539 = 73949,05 \text{ N} \\&= 73,94905 \text{ kN}\end{aligned}$$

Dacă se modifică raza r , se modifică unghiul de înclinare a cablurilor și proiecția pe verticală a forței N . Se recalculează:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_1 &= \frac{r_1}{L} \\ \cos \alpha_1 &= \frac{2000}{4000} = 0,5\end{aligned}$$

rezultă

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \arccos 0,5 = 60^\circ \\G_{max1} &= 3 \cdot N_{max} \cdot \sin \alpha_1 \\G_{max1} &= 3 \cdot 25840,23 \cdot \sin 60^\circ = 67134,88 \text{ N} \\&= 67,13488 \text{ kN}\end{aligned}$$

Dacă r crește de la $r = 1200 \text{ mm}$ la $r = 2000 \text{ mm}$, greutatea maximă care poate fi ridicată scade de la $G_{max1} = 73,94905 \text{ kN}$ la $G_{max1} = 67,13488 \text{ kN}$.

Deci G_{max1} , în procente, scade cu

$$\frac{G_{max1}(r) - G_{max1}(r_1)}{G_{max1}(r)} \cdot 100 = \frac{73,94905 - 67,13488}{73,94905} \cdot 100 = 9,21 \%$$

Problema 2. Trei cabluri de lungime $L = 4000 \text{ mm}$ sunt folosite pentru ridicarea unor greutăți. Fiecare cablu are 6 toroane (Figura 4.3) de câte 36

fire, fiecare fir având diametrul de 1 mm, materialul firelor având tensiunea admisibilă la rupere $\sigma_a = 110 \text{ MPa}$. Dacă punctele de prindere a greutatei se înscriu într-un cerc cu raza $r=1000 \text{ mm}$ (Figura 4.4). Se cere greutatea maximă ce poate fi ridicată în această configurație. Cum se modifică greutatea care poate fi ridicată dacă punctele de prindere se înscriu într-un cerc cu raza $r=1800 \text{ mm}$.

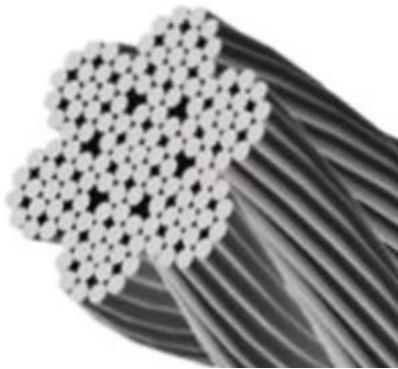


Figura 4.3

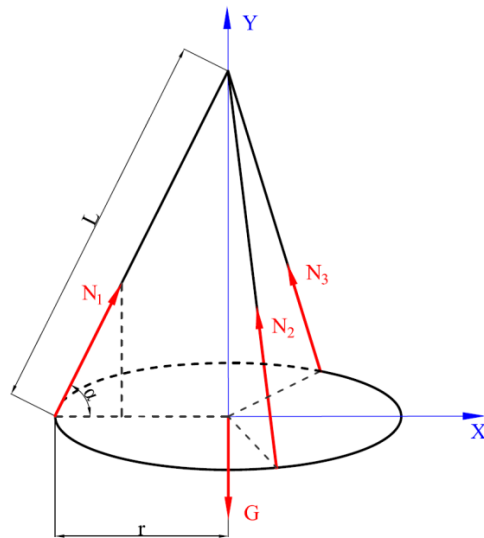


Figura 4.4

Rezolvare

Se notează forța care ia naștere în fiecare cablu:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N$$

Se calculează unghiul format de fiecare cablu cu orizontala.

$$\cos \alpha = \frac{r}{L}$$

$$\cos \alpha = \frac{1000}{4000} = 0,25$$

$$\alpha = \arccos 0,25 = 75,52^\circ$$

Forța maximă care poate fi aplicată pe cablu este:

$$N_{max} = \sigma_a \cdot A_{cablu}$$

$$A_{cablu} = n \cdot m \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

unde

n reprezintă numărul de fire dintr-un toron,
 m reprezintă numărul de toroane.

Aria unui fir este:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$A_{cablu} = 6 \cdot 36 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = 6 \cdot 36 \cdot 0,785 = 169,56 \text{ mm}^2$$

Înlocuim $A_{cablu} = 169,56 \text{ mm}^2$ și $\sigma_a = 110 \text{ MPa}$ în relația $N_{max} = \sigma_a \cdot A_{cablu}$, se obține

$$N_{max} = 110 \cdot 169,56 = 18651,6 \text{ N}$$

Echilibrul forțelor pe direcție verticală se scrie:

$$N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha - G = 0$$

$$3N \sin \alpha = G$$

$$G = 3 \cdot N \sin \alpha$$

$$G_{max} = 3 \cdot N_{max} \cdot \sin \alpha$$

$$G_{max} = 3 \cdot 18651,6 \cdot \sin 75,52^\circ$$

$$G_{max} = 3 \cdot 18651,6 \cdot 0,9682 = 54175,44 \text{ N} = 54,17544 \text{ kN}$$

Dacă se modifică raza r , se modifică unghiul de înclinare a cablurilor și proiecția pe verticală a forței N . Se recalculează

$$\cos \alpha_1 = \frac{r_1}{L}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{1800}{4000} = 0,45$$

rezultă

$$\alpha_1 = \arccos 0,45 = 63,26^\circ$$

$$G_{max1} = 3 \cdot N_{max} \cdot \sin \alpha_1$$

$$G_{max1} = 3 \cdot 18651,6 \cdot \sin 63,26^\circ = 49970,85 \text{ N}$$

$$= 49,97085 \text{ kN}$$

Problema 3. Patru cabluri de lungime $L=5$ m sunt folosite pentru ridicarea unor greutateți. Fiecare cablu are 7 toroane de câte 19 fire, fiecare fir având diametrul de 1,2 mm, materialul firelor având tensiunea admisibilă la rupere $\sigma_r = 110 \text{ MPa}$. Dacă punctele de prindere a greutateții se înscriu într-un dreptunghi, de dimensiuni $x=1200$ mm și $y=600$ mm (Figura 4.5). Se cere greutatea maximă ce poate fi ridicată în această configurație. Cum se modifică greutatea care poate fi ridicată dacă punctele de prindere se înscriu într-un dreptunghi, cu următoarele dimensiuni $x=2000$ mm și $y=1200$ mm.

Rezolvare

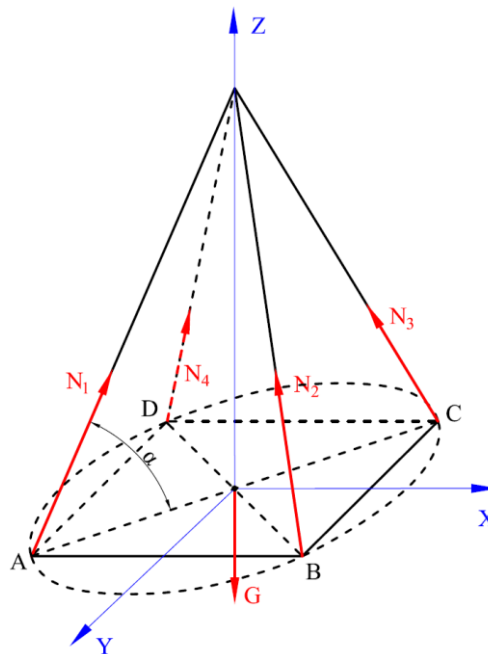


Figura 4.5

Se notează forța care acționează pe un cablu

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N$$

Se calculează unghiul format de cablu cu horizontala

$$\cos \alpha = \frac{\frac{d}{2}}{L}$$

$\frac{d}{2}$ este jumătate din diagonala dreptunghiului

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2000^2 + 1200^2} = 2332,38 \text{ mm}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{2332,38}{2}}{5000} = 0,2332$$

$$L = 5 \text{ m} = 5000 \text{ mm}$$

$$\alpha = \arccos 0,2332 = 76,514^\circ$$

$$N_{max} = \sigma_a \cdot A_{cablu}$$

$$A_{cablu} = n \cdot m \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

unde

n reprezintă numărul de fire dintr-un toron,
 m reprezintă numărul de toroane.

Aria unui fir este:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$A_{cablu} = 7 \cdot 19 \cdot \frac{\pi \cdot 1,2^2}{4} = 7 \cdot 19 \cdot 1,76 = 150,42 \text{ mm}^2$$

Înlocuim $A_{cablu} = 150,42 \text{ mm}^2$ și $\sigma_a = 110 \text{ MPa}$ în relația $N_{max} = \sigma_a \cdot A_{cablu}$, se obține

$$N_{max} = 110 \cdot 150,42 = 16546,2 \text{ N} = 16,5462 \text{ kN}$$

Echilibrul forțelor pe direcție verticală se scrie:

$$N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha + N_4 \sin \alpha - G = 0$$

$$4N \sin \alpha = G$$

$$G = 4 \cdot N \sin \alpha$$

$$G_{max} = 4 \cdot N_{max} \cdot \sin \alpha$$

$$G_{max} = 4 \cdot 16546,2 \cdot \sin 76,514^\circ$$

$$G_{max} = 4 \cdot 16,5462 \cdot 0,97 = 64,19926 \text{ kN}$$

Dacă se modifică dimensiunile dreptunghiului la $x=2000$ mm și $y=1200$ mm, se modifică unghiul de înclinare a cablurilor și proiecția pe verticală a forței N_{max} . Forța N_{max} rămâne neschimbată, ea depinzând de caracteristicile cablului.

$$\cos \alpha_1 = \frac{\frac{d}{2}}{L}$$

$\frac{d}{2}$ este jumătate din diagonala dreptunghiului

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3000^2 + 2000^2} = 3605,551 \text{ mm}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{3605,551}{2}}{5000} = 0,360551$$

rezultă

$$\alpha_1 = \arccos 0,360551 = 68,8657^\circ$$

$$G_{max1} = 4 \cdot F_{max} \cdot \sin \alpha_1$$

$$G_{max1} = 4 \cdot 16,5462 \cdot \sin 68,86^\circ = 61,73069 \text{ kN}$$

Problema 4. Patru cabluri de lungime $L=3000$ mm sunt folosite pentru ridicarea unor greutăți. Fiecare cablu are 6 toroane de câte 36 fire, fiecare fir având diametrul de 1,2 mm, materialul firelor având tensiunea admisibilă la rupere $\sigma_a = 110$ MPa. Punctele de prindere a greutății se înscriu într-un dreptunghi (cu următoarele dimensiuni $x=2400$ mm și $y=1200$) (Figura 4.6). Se cere greutatea maximă ce poate fi ridicată în această configurație. Cum se modifică greutatea care poate fi ridicată dacă punctele de prindere se înscriu într-un dreptunghi cu următoarele dimensiuni $x=3600$ mm și $y=2000$ mm.

Rezolvare

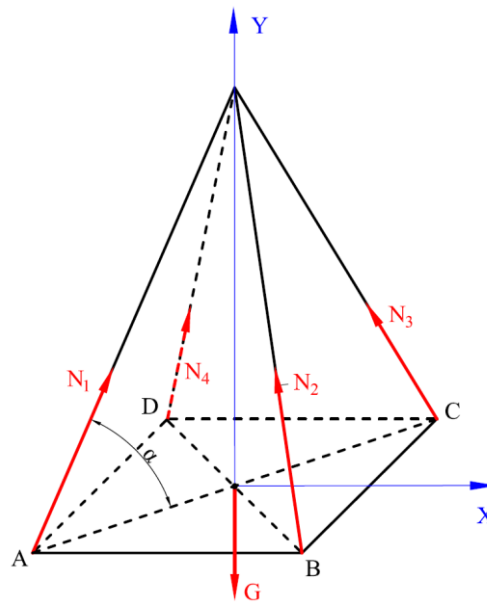


Figura 4.6

Se notează

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = N$$

Se calculează unghiul format de cablu cu orizontala

$$\cos \alpha = \frac{\frac{d}{2}}{L}$$

$\frac{d}{2}$ este jumătate din diagonala dreptunghiului

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2400^2 + 1200^2} = 2683,28 \text{ mm}$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{2683,28}{2}}{3000} = 0,4472$$

$$\alpha = \arccos 0,4472 = 63,44^\circ$$

$$N_{max} = \sigma_a \cdot A_{cablu}$$

$$A_{cablu} = n \cdot m \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

unde

n reprezintă numărul de fire dintr-un toron,
m reprezintă numărul de toroane.

$$A_1 = \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$A_{cablu} = 6 \cdot 36 \cdot \frac{\pi \cdot 1,2^2}{4} = 6 \cdot 36 \cdot 1,13 = 244,29 \text{ mm}^2$$

Înlocuim $A_{cablu} = 244,29 \text{ mm}^2$ și $\sigma_a = 110 \text{ MPa}$ în relația $N_{max} = \sigma_a \cdot A_{cablu}$, se obține

$$N_{max} = 110 \cdot 244,29 = 26871,9 \text{ N}$$

Echilibrul forțelor pe direcție verticală se scrie:

$$N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha + N_4 \sin \alpha - G = 0$$

$$4 \cdot N \sin \alpha = G$$

$$G = 4 \cdot N \sin \alpha$$

$$G_{max} = 4 \cdot N_{max} \cdot \sin\alpha$$
$$G_{max} = 4 \cdot 26871,9 \cdot \sin 63,44^\circ$$
$$G_{max} = 4 \cdot 26871,9 \cdot 0,9165 = 96144,07 \text{ N}$$

Dacă se modifică raza r , se modifică unghiul de înclinare al cablurilor și amprenta pe verticală a forței N . Se recalculează:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\frac{d}{2}}{L}$$

$\frac{d}{2}$ este jumătate din diagonala dreptunghiului

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3600^2 + 2000^2} = 4118,25 \text{ mm}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{4118,25}{2}}{3000} = 0,69$$

Rezultă

$$\alpha_1 = \arccos 0,69 = 43,37^\circ$$
$$G_{max1} = 4 \cdot N_{max} \cdot \sin\alpha_1$$
$$G_{max1} = 4 \cdot 26871,9 \cdot \sin 43,37^\circ = 738142,485 \text{ N}$$

Problema 5. O bară de oțel cu secțiunea constantă și lungimea $l=500 \text{ mm}$ se lungeste sub acțiunea unei forțe cu $\Delta l = 0,5 \text{ mm}$. Să se calculeze forța de întindere, cunoscându-se volumul barei $V_{\text{oțel}} = 3 \cdot 10^5 \text{ mm}^3$.

Rezolvare

Se consideră că bara se deformează elastic și se scrie legea lui Hooke

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

unde

σ este tensiunea la tracțiune,

E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului barei,

ε este deformația la întindere a barei.

Tensiunea la tracțiune este dată de relația:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

în care A este aria secțiunii barei iar F este forța de întindere.

Deformația barei sub solicitarea forței F este:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

în care ΔL este alungirea barei iar L este lungimea inițială.

Înlocuind relația $\sigma = \frac{F}{A}$ și relația $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ în relația $\sigma = E \cdot \varepsilon$, rezultă:

$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

Aria se poate calcula din relația:

$$V = A \cdot L \Rightarrow A = \frac{V}{L}$$

Înlocuind relația $A = \frac{V}{L}$ în relația $F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L}$, se obține:

$$F = E \cdot \frac{V}{L} \cdot \frac{\Delta L}{L} = E \cdot \frac{\Delta L \cdot V}{L^2}$$

$$F = 2,1 \cdot 10^5 \frac{0,5 \cdot 300000}{500^2} = 126000 \text{ N} = 126 \text{ kN}$$

Problema 6. O bară din oțel marca C45 N (oțel carbon normalizat cu 0,45% carbon, conform SR EN ISO 683-1:2018), cu diametrul $d=6$ mm, este solicitată la întindere. Să se calculeze forța F necesară pentru a produce o deformație de 0,015%. Să se calculeze coeficientul de siguranță la solicitarea de întindere statică. Să se calculeze forța care produce ruperea barei.

Rezolvare

Se scrie relația deformației la întindere plecând de la legea lui Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

unde

σ este tensiunea la întindere,

E este modulul de elasticitate longitudinal pentru oțel, $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa,

ε este deformația la întindere ($\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$).

Din legea lui Hooke rezultă:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Se știe că:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

pentru solicitarea de întindere,

unde

F este forța de întindere,

A este aria secțiunii barei.

Pentru o bară rotundă de diametru $d=6$ mm, aria este egală cu:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Înlocuind relația $\sigma = \frac{F}{A}$ în relația $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, se obține:

$$\varepsilon = \frac{F}{EA}$$

Sub acțiunea forței de întindere, F , bara se deformează cu:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l$$

Din relația $\Delta l = \varepsilon \cdot l$ rezultă că:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{EA}$$

unde

EA este rigiditatea barei la întindere.

Din relația $\varepsilon = \frac{F}{EA}$ rezultă că forța de întindere F se calculează cu relația:

$$F = \varepsilon \cdot E \cdot A$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$F = \frac{0,015}{100} \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 6^2}{4} = 890,64 \text{ N}$$

Se calculează tensiunea la întindere (legea lui Hooke):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\sigma = 2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,015}{100} = 31,5 \text{ MPa}$$

Coefficientul de siguranță la solicitare statică, s , se calculează cu următoarea relație:

$$s = \frac{\sigma_r}{\sigma}$$

în care

σ_r este limita la rupere la tracțiune a materialului barei. Pentru oțelul din care este realizat bara, C45 N, $\sigma_r = 550 \text{ MPa}$,

σ este tensiunea în bara solicitată la tracțiune.

$$s = \frac{550}{31,5} = 17,46$$

Forța de întindere pentru ruperea barei este:

$$F_r = \sigma_r \cdot A$$

$$F_r = \sigma_r \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$F_r = 550 \cdot \frac{\pi \cdot 6^2}{4} = 15550,88 \text{ N} = 15,55088 \text{ kN}$$

Problema 7. O epruvetă din oțel cu dimensiunile din Figura 4.8 se rupe sub acțiunea forței de tracțiune $F = 29000$ N. Să se determine tensiunea din epruvetă și deformația la rupere pentru forța aplicată.

Se dau:

modulul de elasticitate longitudinal la tracțiune pentru oțel, $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa,

diametrul inițial al epruvetei, $d_0 = 10$ mm,

lungimea inițială, $L_0 = 100$ mm.

Rezolvare:

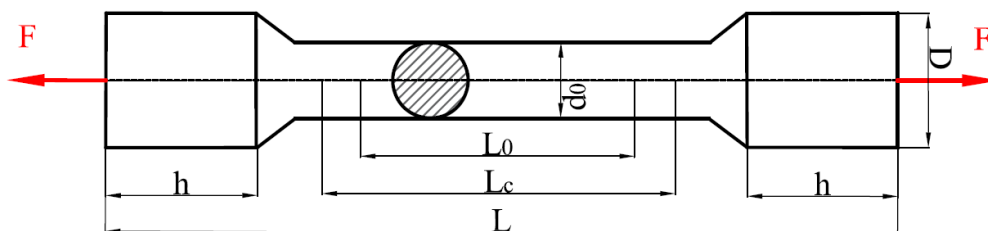


Figura 4.8.

Tensiunea de rupere la tracțiune σ_r se calculează cu următoarea formulă:

$$\sigma_r = \frac{F_r}{A}$$

unde

σ_r este tensiunea de rupere la tracțiune,

F_r este forța de rupere aplicată la tracțiune,

A este aria secțiunii transversale a epruvetei.

$$A = \frac{\pi \cdot d_0^2}{4}$$

Înlocuind relația $A = \frac{\pi \cdot d_0^2}{4}$ în relația $\sigma_r = \frac{F_r}{A}$, se obține:

$$\sigma_r = \frac{F_r}{\frac{\pi \cdot d_0^2}{4}} = \frac{4F_r}{\pi \cdot d_0^2} = \frac{4 \cdot 29000}{\pi \cdot 10^2} = 369 \text{ MPa}$$

Dacă se consideră că oțelul respectă legea lui Hooke, adică materialul este perfect elastic până la rupere, se scrie

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

unde

E este modulul de elasticitate longitudinal și este o constantă de material, pentru oțel acesta având valoarea

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

ε este deformația specifică a epruvetei

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \rightarrow \Delta L = \varepsilon \cdot L$$

unde

ΔL este deformația epruvetei

$$\Delta L = L_0 - L$$

L_0 este lungimea inițială a epruvetei,

L este lungimea la terminarea solicitării de tracțiune a epruvetei (aici până la rupere).

Din relația $\sigma = E \cdot \varepsilon$, rezultă că:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

dar

$$\sigma_r = \frac{F_r}{A}$$

Rezultă, în final, că:

$$\varepsilon_r = \frac{F_r}{AE}$$

înlocuim relația $\varepsilon_r = \frac{F_r}{AE}$ în relația $\Delta L_r = \varepsilon_r \cdot L$ se obține:

$$\Delta L_r = \frac{F_r \cdot L}{EA} \rightarrow$$

$$\Delta L_r = \frac{29000 \cdot 100}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 10^2}{4}}$$

$$\Delta L_r = \frac{4 \cdot 29000 \cdot 100}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 10^2} = 0,175 \text{ mm}$$

Problema 8. Se consideră o bară solicitată la întindere sub acțiunea forței F. Să se determine forța maximă admisibilă pe care o poate prelua o bară din oțel carbon normalizat C35 N (cu 0,35% carbon, conform SR EN ISO 683-1:2018) cu secțiunea pătrată, având latura $l=40$ mm, dacă $\sigma_a =$

275 N/mm^2 . Să se determine, în acest caz, deformația totală și cea specifică, dacă lungimea barei este 1000 mm.

Rezolvare

L_0 este lungimea inițială a barei,

L_1 este lungimea barei după aplicarea forței de tracțiune,

F este forța de tracțiune.

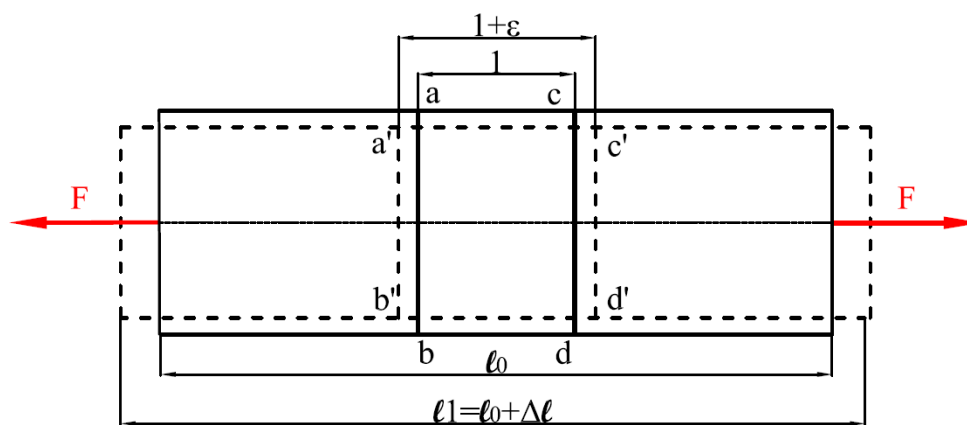


Figura 4.9

Forța maximă admisibilă se calculează cu relația:

$$F_a = \sigma_a \cdot A$$

unde

F_a este forța maximă admisibilă,

σ_a este tensiunea admisibilă la tracțiune pentru materialul barei,

A este aria secțiunii transversale a barei.

Deci

$$F_a = 275 \cdot 40^2 = 440000 \text{ N}$$

Din Legea lui Hook:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

unde

E este modulul de elasticitate longitudinal (este o constantă de material: pentru oțel $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$)

ϵ este deformația specifică.

Rezultă relația de calcul a deformației specifice:

$$\varepsilon = \frac{F_a}{EA}$$

unde

ε este deformația specifică,

F_a este forța maxim admisibilă la tracțiune,

E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului barei
(pentru oțel $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$)

A este aria secțiunii transversal a barei.

deci,

$$\varepsilon = \frac{440000}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 40^2} = 0,0013 \text{ mm}$$

deformația specifică se mai poate determina cu următoarea relație:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

unde

ε este deformația specifică,

ΔL este lungirea totală a barei la tracțiune,

L_0 este lungimea inițială a barei.

Lungirea totală a barei este:

$$\Delta L = \varepsilon \cdot L_0$$

Înlocuim și obținem

$$\Delta L = \frac{F_a \cdot L_0}{E \cdot A}$$

$$\Delta L = \frac{440000 \cdot 1000}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 40^2} = 1,309 \text{ mm}$$

$$\varepsilon = \frac{1,309}{1000} = 0,001309 \text{ mm}$$

Problema 9. Să se calculeze coeficientul de siguranță al unei bare din oțel în care se produce tensiunea admisibilă $\sigma_a = 150 \text{ MPa}$, materialul fiind C55 N (oțel carbon cu 0,55%, carbon normalizat , conform SR EN ISO 683-1:2018).

Se dă: tensiunea de rupere la tracțiune a materialului C55: $\sigma_r = 550 \text{ MPa}$ (pentru piese cu dimensiuni $16 \text{ mm} < d \leq 40 \text{ mm}$).

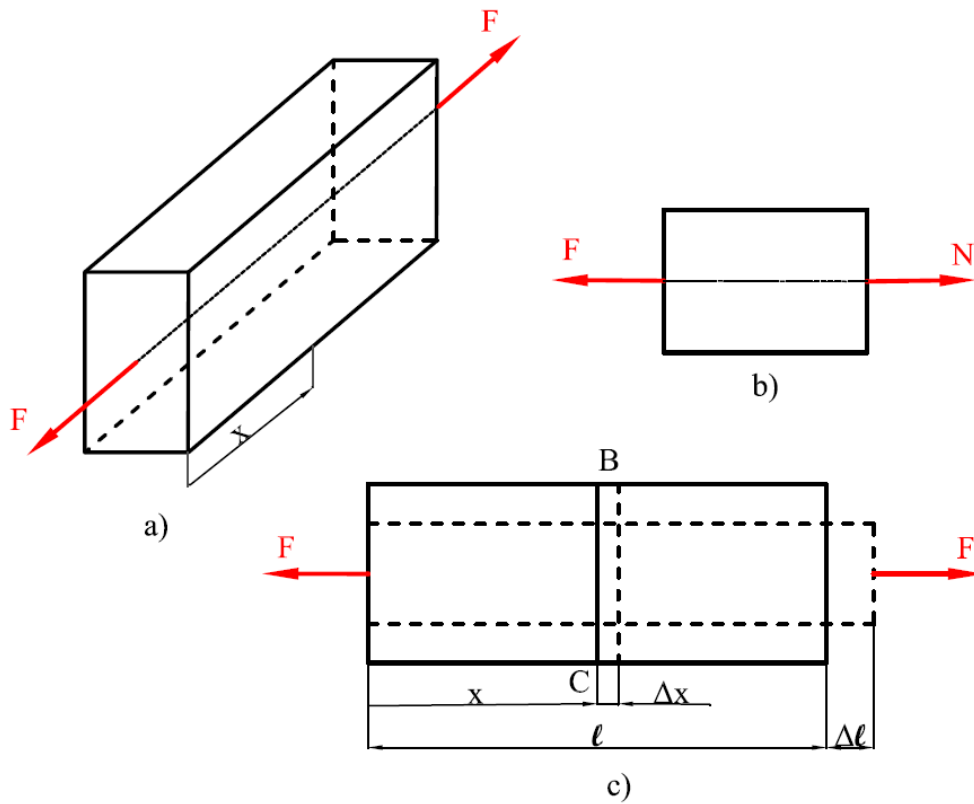


Figura 4.10

Tensiunea admisibilă se calculează cu următoarea formula:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{s_r}$$

unde

σ_a este tensiunea admisibilă la tracțiune a oțelului C45 N,

σ_r este tensiunea de rupere la tracțiune a oțelului C45 N,

s_r este coeficientul de siguranță la solicitarea de tracțiune.

Rezultă că:

$$s = \frac{\sigma_r}{\sigma_a}$$

$$s_r = \frac{550}{150} = 3,66$$

Problema 10. Care este forța F pentru a produce la o bară din C45 CR, cu diametrul $d_0 = 10 \text{ mm}$, o deformație specifică de $0,025\%$. Care este coeficientul de siguranță al barei în raport cu rezistența de rupere?

Rezolvare

Legea lui Hook consideră tensiunea proporțională cu deformația elastică și o constantă de material, E , modulul de elasticitate longitudinal al materialului C45 CR:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

unde

σ este tensiunea de tracțiune produsă de forța F ,

E este modulul de elasticitate longitudinal (constantă de material)

pentru oțel, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N / mm}^2$,

ε este deformația specifică a barei.

Deformația specifică a barei este egală cu:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

unde

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

F este forța de tracțiune la care este sollicitată bara,

A este aria secțiunii circulare a barei.

Se înlocuiește relația $\sigma = \frac{F}{A}$ în relația $\varepsilon = \frac{F}{EA}$ și se obține:

$$\varepsilon = \frac{F}{EA}$$

Rezultă că forța pentru a produce deformația specifică cerută se poate determina cu următoarea relație:

$$F = \varepsilon AE$$

$$A = \frac{\pi d_0^2}{4}$$

unde

$$d_0 = 10 \text{ mm}$$

$$F = \frac{0,025}{100} \cdot \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \cdot 2,1 \cdot 10^5 = 4123,34 \text{ N}$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\sigma = 2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{0,025}{100} = 52,5 \text{ MPa}$$

Rezistența de rupere pentru materialul C45 CR (oțel carbon cu 0,45% carbon, călit și revenit, conform SR EN xISO 683-1:2018) este:

$$\sigma_r = 700 \text{ MPa}$$

unde

σ_r este rezistența de rupere la tracțiune pentru acest oțel.

Tensiunea în bară se calculează cu următoarea formula:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_r}{s_r}$$

unde:

σ_1 este tensiunea la tracțiune,

σ_r este rezistența de rupere la tracțiune pentru acest oțel,

s_r este coeficientul de siguranță al barei la solicitarea de tracțiune.

Rezultă că:

$$s_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_1}$$
$$s_r = \frac{700}{52,5} = 13,33$$

CAPITOLUL 5. COMPRESIUNE

Problema 1. O bară din oțel cu secțiunea circulară este sollicitată la compresiune ca în Figura 5.1. Să se dimensioneze secțiunile barei. Să se calculeze scurtarea barei sub acțiunea forței (sarcinii).

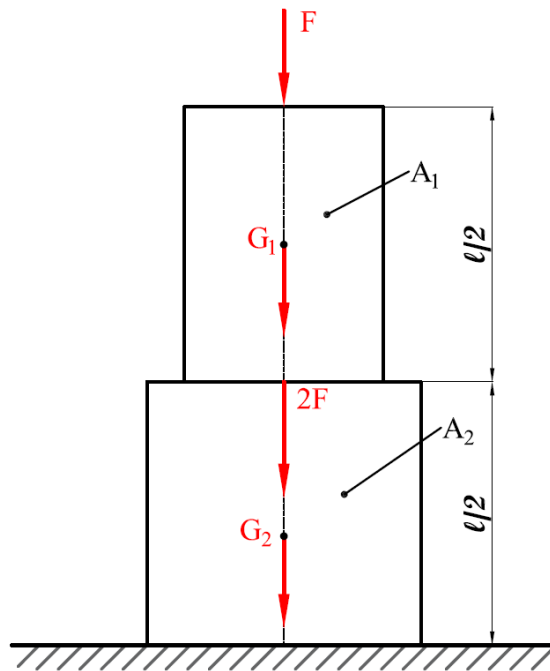


Figura 5.1

Se dă:

lungimea barei $l=8000$ mm,

forța $F=200000$ N,

tensiunea admisibilă a materialului barei, $\sigma_a = 150$ N/mm²,

greutatea specifică a materialului, $\gamma = 78,5 \cdot 10^{-6}$ N/mm³,

modulul de elasticitate longitudinalele, $E = 2,1 \cdot 10^5$ N/mm².

Rezolvare

Bara este alcătuită din două tronsoane, au arii diferite A_1 și, respectiv, A_2 .

Asupra barei acționează forța exterioară F pe suprafața exterioară

tronsonului 1 și greutatea fiecărui tronson, G_1 și, respectiv, G_2 .

Asupra barei acționează forțele astfel: pe tronsonul 1 forța F și greutatea G_1 ,

pe tronsonul 2 acționează toate forțele de pe tronsonul 1 plus forța $2F$ și G_2 .

Pe tronsonul 1:

$$R_1 = G_1 + F$$

$$R_1 = \sigma_a \cdot A_1$$

$$\sigma_a \cdot A_1 = A_1 \gamma l_1 + F \Rightarrow F = A_1(\sigma_a - \gamma l_1)$$

Bara se dimensionează cu următoarea relație:

$$A_1 = \frac{F}{\sigma_a - \gamma l_1}$$

unde

A_1 este aria tronsonului 1 al piesei,

σ_a este tensiunea admisibilă,

γ este greutatea specifică a oțelului.

$$A_1 = \frac{200000}{150 - 78,5 \cdot 10^{-6} \cdot 4000} = 1333,61 \text{ mm}^2$$

Pe suprafața inferioară a tronsonul 2 acționează forțele:

$$R_2 = G_1 + G_2 + 3F$$

$$\sigma_a \cdot A_2 = A_2 \gamma l_2 + 3F + G_1 \Rightarrow F = A_1(\sigma_a - \gamma l_2)$$

$$A_2 = \frac{F + G_1}{\sigma_a - \gamma l_2}$$

A_2 este aria tronsonului 2 al piesei,

G_1 este greutatea primului tronson.

Greutatea primei secțiuni se calculează cu relația:

$$G_1 = \gamma A_1 l_1$$

$$G_1 = 78,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1333,61 \cdot 4000 = 418,75 \text{ N}$$

Înlocuim relația $G_1 = \gamma A_1 l_1$ în $A_2 = \frac{3F + G_1}{\sigma_a - \gamma l_2}$, și se obține:

$$A_2 = \frac{3F + \gamma A_1 l_1}{\sigma_a - \gamma l_2}$$

$$A_2 = \frac{3 \cdot 200000 + 418,75}{150 - 78,5 \cdot 10^{-6} \cdot 4000} = 11675000,00 \text{ mm}^2$$

Deformarea tronsonului 1 pe direcția de solicitare este:

$$\Delta l_1 = \frac{(Fl_1 + \frac{1}{2} \gamma l_1 A_1)}{EA_1}$$

$$\Delta l_1 = \frac{(200000 \cdot 4000 + \frac{1}{2} \cdot 78,5 \cdot 10^{-6} \cdot 4000 \cdot 1333,61)}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 1333,61} = 2,85 \text{ mm}$$

Deformarea tronsonului 2 este:

$$\Delta l_2 = \frac{(3Fl_2 + \frac{1}{2} \gamma l_2 A_2)}{EA_2}$$

$$\begin{aligned} \Delta l_2 &= \frac{(3 \cdot 200000 \cdot 4000 + \frac{1}{2} \cdot 78,5 \cdot 10^{-6} \cdot 4000 \cdot 11675000)}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 11675000} \\ &= 0,0097 \text{ mm} \end{aligned}$$

Deformarea totală se calculează cu relația:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 2,85 + 0,0097 = 2,8597 \text{ mm}$$

$$\Delta l = 0,00071 + 0,000072 = 0,00143 \text{ mm}$$

Problema 2. O tijă dintr-un aliaj de aluminiu, de secțiune circulară A , este solicitată cu forța F pe suprafața superioară (Figura 5.2a). Tija din Figura 5.2a are aceeași secțiune pe toată lungimea l , dar tija din Figura 5.2b, executată din același material, are 4 tronsoane de lungimi egale. $l/4$, dar cu secțiuni diferite, A_1, A_2, A_3 și A_4 . Se cer următoarele:

- să se compare greutatea tijei din Figura 5.2a cu cea a tijei din Figura 5.2b,
- să se calculeze scurtarea tijei din Figura 5.2a și cea a tijei din Figura 5.2b.

Se cunosc:

forța $F = 400000 \text{ N}$,

lungimea tijei $l = 2000 \text{ mm}$ (aceeași pentru ambele tije),

tensiunea admisibilă a materialului la compresiune, $\sigma_a = 80 \text{ N/mm}^2$,

densitatea aliajului de aluminiu $\rho_{Al} = 2780 \text{ kg/m}^3$,
accelerația gravitațională $g \cong 10 \text{ m/s}^2$.

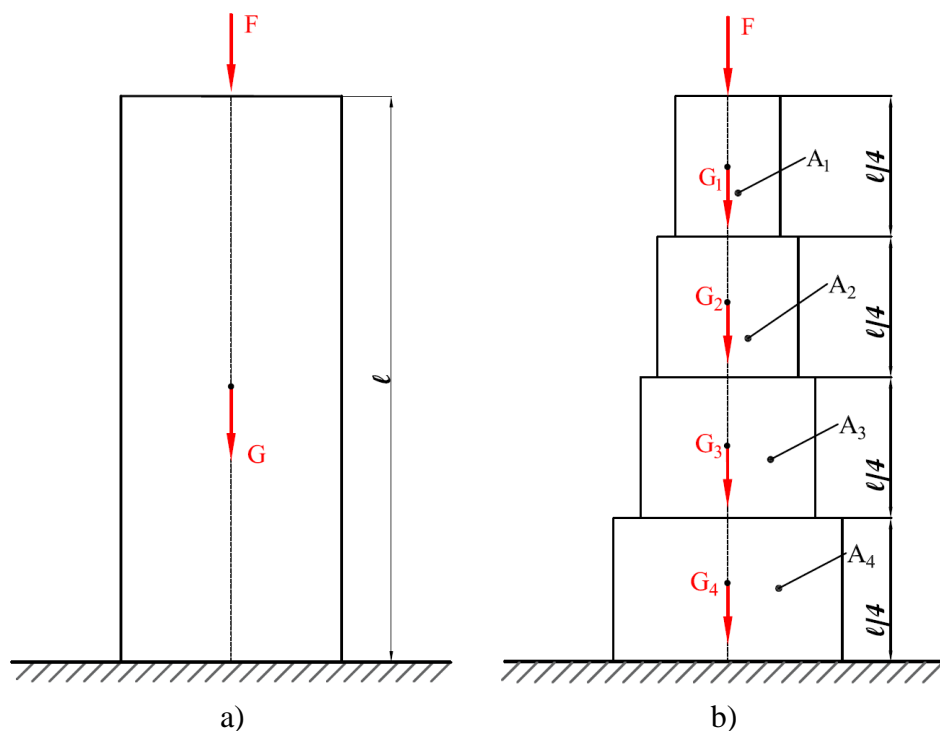


Figura 5.2

Rezolvare

Tija cu diametru constant d (Figura 5.2a) se dimensionează astfel încât tensiunea de compresiune la baza tije să fie egală cu tensiunea admisibilă, σ_a .

Asupra bazei tije acționează forța F , aplicată pe suprafața de sus a tije și greutatea G a tije care acționează în centrul de greutate al tije. Pentru un cilindru din material izotrop și omogen, centrul de greutate se află pe axa cilindrului, la jumătatea înălțimii acestuia.

Baza cilindrului (suprafața de jos) trebuie să suporte rezultanta forțelor exercitate asupra ei, $F + G$.

Rezultă că la baza cilindrului se poate scrie:

$$F + G = \sigma_a \cdot A$$

Se scrie greutatea tije astfel:

$$G = m \cdot g = \rho_{Al} \cdot V \cdot g = \rho_{Al} \cdot A \cdot l \cdot g$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

Se introduce relația $G = \rho_{Al} \cdot A \cdot l \cdot g$ în relația $F + G = \sigma_a \cdot A$:

$$F + \rho_{Al} \cdot A \cdot l \cdot g = \sigma_a \cdot A$$

$$F = \sigma_a \cdot A - \rho_{Al} \cdot A \cdot l \cdot g = A(\sigma_a - \rho_{Al} \cdot l \cdot g)$$

$$A = \frac{F}{\sigma_a - \rho_{Al} \cdot l \cdot g}$$

unde

$$\rho_{Al} \cdot g = \gamma_{Al}$$

$$\rho_{Al} \cdot g = 2780 \cdot 10 = 27800 \text{ N/m}^3 = 27800 \cdot \frac{1}{10^9} \text{ N/mm}^3$$

$$\gamma_{Al} = 27,8 \cdot 10^{-6} \text{ N/mm}^3$$

Se introduce relația $\rho_{Al} \cdot g = \gamma_{Al}$ în relația $A = \frac{F}{\sigma_a - \rho_{Al} \cdot l \cdot g}$, se obține:

$$A = \frac{F}{\sigma_a - \gamma_{Al} \cdot l}$$

$$A = \frac{400000}{90 - 27,8 \cdot 10^{-6} \cdot 2000} = 4447,19 \text{ mm}^2$$

Din relația $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ rezultă ca diametrul d este egal cu:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 4447,19}{\pi}} = 75,24 \text{ mm}$$

Pentru tija din Figura 5.2b, se dimensionează fiecare tronson, tinându-se seama de forțele care acționează pe suprafața de jos a fiecărui tronson.

Astfel, pe suprafața A_1 (baza tronsonului 1) acționează forța F și greutatea tronsonului 1, G_1 .

$$F + G_1 = \sigma_a \cdot A_1$$

Se scrie greutatea tijei astfel

$$G_1 = m_1 \cdot g = \rho_{Al} \cdot V_1 \cdot g = \rho_{Al} \cdot A_1 \cdot \frac{l}{4} \cdot g = \gamma_{Al} \cdot A_1 \cdot \frac{l}{4}$$

Se introduce relația $G_1 = \gamma_{Al} \cdot A_1 \cdot \frac{l}{4}$ în relația $F + G_1 = \sigma_a \cdot A_1$, se obține:

$$F + \gamma_{Al} \cdot A_1 \cdot \frac{l}{4} = \sigma_a \cdot A_1$$

$$F = \sigma_a \cdot A_1 - \gamma_{Al} \cdot A_1 \cdot \frac{l}{4} = A_1 \left(\sigma_a - \gamma_{Al} \cdot \frac{l}{4} \right)$$

$$A_1 = \frac{F}{\sigma_a - \gamma_{Al} \cdot \frac{l}{4}}$$

$$A_1 = \frac{400000}{90 - 27,8 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2000}{4}} = 4445,13 \text{ mm}^2$$

Din relația $A_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4}$ rezultă ca diametrul d_1 este egal cu:

$$d_1 = \sqrt{\frac{4A_1}{\pi}}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 4445,13}{\pi}} = 75,2310 \text{ mm}$$

Pe suprafața inferioară a tronsonului 2 acționează forța F și greutatele tronsoanelor 1 și 2.

$$F + G_1 + G_2 = \sigma_a \cdot A_2$$

$$G_1 = \gamma_{Al} \cdot A_1 \cdot \frac{l}{4}$$

$$G_1 = 27,8 \cdot 10^{-6} \cdot 4445,13 \cdot \frac{2000}{4} = 61,78 \text{ N}$$

$$G_2 = \gamma_{Al} \cdot A_2 \cdot \frac{l}{4}$$

Se introduce relația $G_2 = \gamma_{Al} \cdot A_2 \cdot \frac{l}{4}$ în relația $F + G_1 + G_2 = \sigma_a \cdot A_2$, se obține:

$$F + G_1 + \gamma_{Al} \cdot A_2 \cdot \frac{l}{4} = \sigma_a \cdot A_2$$

$$A_2 = \frac{F + G_1}{\sigma_a - \gamma_{Al} \cdot \frac{l}{4}}$$
$$A_2 = \frac{400000 + 61,78}{90 - 27,8 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2000}{4}} = 4445,82 \text{ mm}^2$$

Din relația $A_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4}$ rezultă ca diametrul d_2 este egal cu:

$$d_2 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}}$$
$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 4445,82}{\pi}} = 75,2369 \text{ mm}$$

Pe suprafața inferioară a tronsonului 3 acționează forța F și greutatea tronsoanelor 1, 2 și 3.

$$F + G_1 + G_2 + G_3 = \sigma_a \cdot A_3$$
$$G_1 = 61,78 \text{ N}$$
$$G_2 = \gamma_{Al} \cdot A_2 \cdot \frac{l}{4}$$
$$G_2 = 27,8 \cdot 10^{-6} \cdot 4445,82 \cdot \frac{2000}{4} = 61,79 \text{ N}$$
$$G_3 = \gamma_{Al} \cdot A_3 \cdot \frac{l}{4}$$

Se introduce relația $G_3 = \gamma_{Al} \cdot A_3 \cdot \frac{l}{4}$ în relația $F + G_1 + G_2 + G_3 = \sigma_a \cdot A_3$, se obține:

$$F + G_1 + G_2 + \gamma_{Al} \cdot A_3 \cdot \frac{l}{4} = \sigma_a \cdot A_3$$
$$A_3 = \frac{F + G_1 + G_2}{\sigma_a - \gamma_{Al} \cdot \frac{l}{4}}$$
$$A_3 = \frac{400000 + 61,78 + 61,79}{90 - 27,8 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2000}{4}} = 4446,50 \text{ mm}^2$$

Din relația $A_3 = \frac{\pi \cdot d_3^2}{4}$ rezultă ca diametrul d_3 este egal cu:

$$d_3 = \sqrt{\frac{4A_3}{\pi}}$$
$$d_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot 4446,50}{\pi}} = 75,2427 \text{ mm}$$

Pe suprafața inferioară a tronsonului 4 acționează forța F și greutatea tronsoanelor 1, 2, 3 și 4.

$$F + G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = \sigma_a \cdot A_4$$

$$G_1 = 61,78 \text{ N}$$

$$G_2 = 61,79 \text{ N}$$

$$G_3 = \gamma_{Al} \cdot A_3 \cdot \frac{l}{4}$$

$$G_3 = 27,8 \cdot 10^{-6} \cdot 4446,50 \cdot \frac{2000}{4} = 61,8064 \text{ N}$$

$$G_4 = \gamma_{Al} \cdot A_4 \cdot \frac{l}{4}$$

Se introduce relația $G_4 = \gamma_{Al} \cdot A_4 \cdot \frac{l}{4}$ în relația $F + G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = \sigma_a \cdot A_4$, se obține:

$$F + G_1 + G_2 + G_3 + \gamma_{Al} \cdot A_4 \cdot \frac{l}{4} = \sigma_a \cdot A_4$$

$$A_4 = \frac{F + G_1 + G_2 + G_3}{\sigma_a - \gamma_{Al} \cdot \frac{l}{4}}$$

$$A_4 = \frac{400000 + 61,78 + 61,79 + 61,80}{90 - 27,8 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2000}{4}} = 4447,19 \text{ mm}^2$$

Din relația $A_4 = \frac{\pi \cdot d_4^2}{4}$ rezultă ca diametrul d_4 este egal cu:

$$d_4 = \sqrt{\frac{4A_4}{\pi}}$$

$$d_4 = \sqrt{\frac{4 \cdot 4447,19}{\pi}} = 75,2545 \text{ mm}$$

Concluzie

Din calcule s-a obținut $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ dar valorile sunt atât de apropiate încât nu se justifică proiectarea pe tronsoane.

Problema 3. Se dă sistemul din Figura 5.3 alcătuit dintr-o țevă de grosime s și o placă de grosime h . Ambele corpuri sunt din oțel cu $\gamma = 78,6 \cdot 10^6 \text{ N/mm}^3$

Se cunosc:

- grosimea țevii $s = 3 \text{ mm}$,
- grosimea plăcii $h = 5 \text{ mm}$,
- diametrul plăci $D = 200 \text{ mm}$,
- forța $F = 10\,000 \text{ N}$.

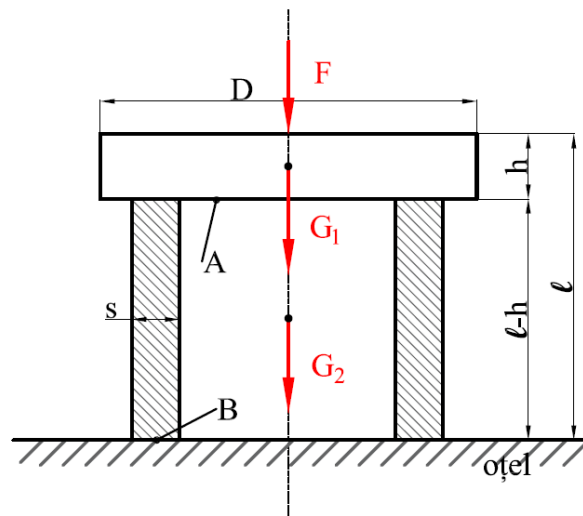


Figura 5.3

Rezolvare

Suprafața superioară a țevii (notată cu A, este solicitată la compresiune cu rezultanta forțelor $F + G_1$, în care G_1 este greutatea unei plăci de grosime h , din același material cu țeava.

Se calculează G_1 știind că $h=5$ mm

$$G_1 = \gamma \cdot V_{placă}$$

$$V_{placă} = h \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

Înlocuind relația $V_{placă} = h \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$ în relația $G_1 = \gamma \cdot V_{placă}$ se obține:

$$G_1 = \gamma \cdot h \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$G_1 = 78,6 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot \frac{\pi \cdot 200^2}{4} = 12,34 \text{ N}$$

Solicitarea cea mai dezavantajoasă este pe suprafața circulară B (la partea inferioară a țevii).

Tensiunea de compresiune pe suprafața inelară este:

$$\sigma = \frac{F + G_1 + G_2}{A_B}$$

$$G_2 = \gamma \cdot V_{țevă}$$

$$V_{țevă} = (l - h)A_B$$

$$A_B = \pi \cdot \left[\frac{D^2}{4} - \frac{(D - 2s)^2}{4} \right]$$

Înlocuind relația $V_{țevă} = (l - h) \cdot A_B$ în relația $G_2 = \gamma \cdot V_{țevă}$ se obține

$$G_2 = \gamma \cdot (l - h) \cdot A_B$$

$$\sigma = \frac{F + G_1 + \gamma \cdot (l - h) \cdot A_B}{A_B}$$

Tensiunea la compresiune, calculată, nu trebuie să depășească tensiunea admisibilă la compresiune a oțelului.

$$\sigma_a = \frac{F + G_1 + \gamma \cdot (l - h) \cdot A_B}{A_B}$$

$$\sigma_a \cdot A_B = F + G_1 + \gamma \cdot (l - h) \cdot A_B$$

$$A_B[\sigma_a - \gamma \cdot (l - h)] = F + G_1$$

$$A_B = \frac{F + G_1}{\sigma_a - \gamma \cdot (l - h)}$$

$$A_B = \frac{10000 + 12,34}{80 - 78,6 \cdot 10^{-6} \cdot (100 - 5)} = 125,16 \text{ mm}^2$$

$$A_B = \pi \cdot \frac{D^2}{4} - \pi \cdot \frac{(D - 2s)^2}{4}$$

$$A_B = \frac{\pi}{4} (D^2 - D^2 - 4s^2 + 4Ds)$$

$$A_B = \frac{\pi}{4} (-4s^2 + 4Ds) = \frac{4\pi}{4} (-s^2 + Ds) = \pi(-s^2 + Ds)$$

$$A_B = -\pi s^2 + \pi Ds$$

$$A_B + \pi s^2 = \pi Ds$$

$$D = \frac{A_B + \pi s^2}{\pi s}$$

$$s = 3 \text{ mm}$$

$$D = \frac{125,16 + \pi 3^2}{\pi \cdot 3} = 16,27 \text{ mm}$$

CAPITOLUL 6. ÎNCOVOIEREA BARELOR DREPTE

Problema 1. Bara din Figura 6.1 este solicitată de un moment încovoietor M_1 . Să se determine deformația barei solicitată de momentul încovoietor și să se determine legătura dintre tensiuni și momentul încovoietor, luându-se în considerare următoarele aspecte:

- planul de simetrie este planul forțelor,
- se consideră linie dreaptă axa de simetrie a corpului nedeformat,
- raportul dintre înălțimea barei și lungimea barei este mic,
- se aplică legea lui Hooke și ipoteza lui Bernoulli.

Să se determine distanța y (y este distanța de la axa neutră și linia ab), momentul de inerție axial, modulul de rezistență la încovoiere, tensiunile maximă și minimă, produse în bară, deformația specifică a barei în urma aplicării momentului încovoietor pentru o bară din oțel, marca C45 N (oțel carbon normalizat cu 0,45% carbon, conform SR EN ISO 683-1:2018), cu secțiunea transversală dreptunghiulară, având următoarele dimensiuni: $b=10$ mm și $h=20$ mm și să se dimensioneze bara.

Rezolvare

Legea lui Hooke este formulată pentru deformarea materialelor elastice sub acțiunea forțelor exterioare. Legea lui Hooke se scrie:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

unde

σ este tensiunea în corpul deformabil elastic,

ε este deformația specifică,

E este modulul de elasticitate (considerat o constantă de material).

Ipoieza lui Bernoulli sau ipoteza secțiunilor plane se aplică în solicitări de tracțiune și încovoiere: o secțiune plană și normală pe axa unei bare nesolicitate rămâne plană și perpendiculară pe axa barei deformată sub acțiunea solicitării.

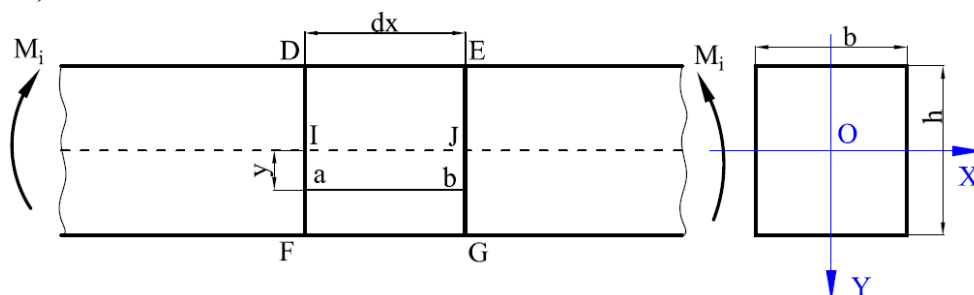


Figura 6.1. Bara nedeformată (și nesolicitată)

În Figura 6.1 notațiile au următoarele semnificații:

- XY este planul de simetrie (cel vertical), XY este și planul forțelor,
- axa de simetrie este OY,
- axa OX este axa barei nedeformate, este o linie dreaptă, numită și axa longitudinală,
- liniile DF și EG sunt perpendiculare pe OX.
- linia ab este paralelă cu axa IJ și este situată la o distanță y față de dreapta IJ,
- h este înălțimea barei,
- dx este lungimea unui element infinit mic al barei,
- M_i este vectorul moment încovoiător,
- IJ este axa barei (linie dreaptă), fibra medie a barei (care coincide cu axa longitudinală în cazul unei bare omogene și izotrope). Se consideră că fibra medie este nedeformabilă.

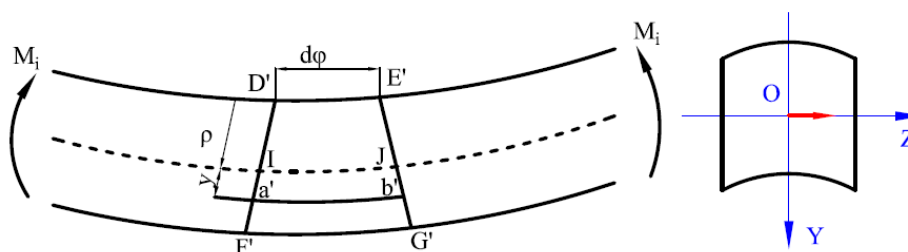


Figura 6.2

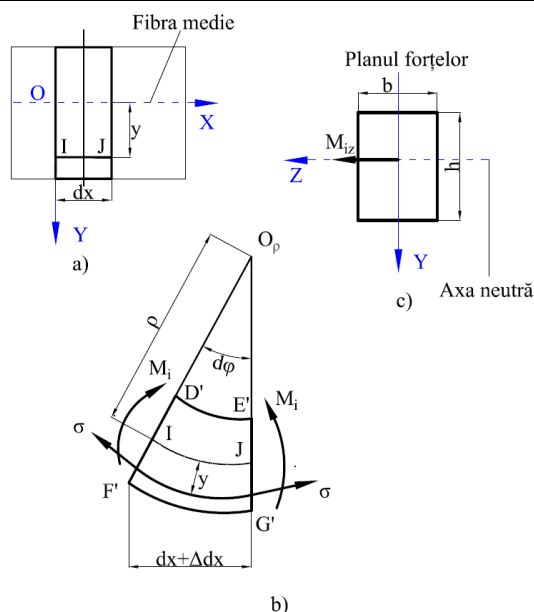


Figura 6.3

Figura 6.3 prezintă bara deformată sub acțiunea momentului încovoiator M_i (unghiurile se consideră în radiani). O_ρ este centrul de curbură al barei deformată, ρ fiind raza de curbură.

Se consideră axa neutră, axa barei pentru care tensiunea este nulă.

Atunci când momentul încovoiator soliciță bara, bara se deformează (Figura 6.2b)

În Figura 6.3, notațiile au următoarele semnificații:

- IJ este un arc de curbură al barei deformată, și axa neutră a barei deformată,
- D'F' este o dreaptă perpendiculară pe axa barei deformată,
- E'G' este o dreaptă,
- D'E' este arc de cerc, pe care materialul este solicițat la compresiune,
- a'b' este un arc de lungime $dx + \Delta x$ (fibra alungită),
- D'F' și E'G' sunt drepte concurente într-un punct O (punctul centrului de curbură al barei deformată).

Punctul O_ρ , în care sunt concurente dreapta D'F' și dreapta E'G', este centrul de curbură al arcurilor D'E', IJ, a'b' și F'G'.

După solicițarea barei cu momentul încovoiator, M_i , următoarele segmente se deformează astfel:

FG se lungește (devine F'G'),
ab se lungește (devine a'b'),
AC se scurtează (devine A'C'),
IJ nu se modifică (axa neutră).

IJ (arc de curbura, Figura 6.3) =
= IJ (linie dreaptă, Figura 6.1, pe axa barei, fibra rămâne nedeformată)
= $dx + \Delta x = \rho d\varphi$

unde

ρ reprezintă raza de curbura a fibrei medii nedeformate.

Lungimea arcului a'b' se calculează cu următoarea formulă:

$$a'b' = (\rho + y)d\varphi$$

În urma solicitării barei de către momentul încovoiator, lungimea fibrei ab se modifica astfel:

$$\Delta(ab) = \Delta dx = (\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi = yd\varphi$$

$$\Delta dx = yd\varphi$$

Deformația specifică este dată de următoarea relație:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx}$$

Se introduce relația $\Delta dx = yd\varphi$ și relația $dx = \rho d\varphi$ în relația $\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx}$, și se obține:

$$\varepsilon = \frac{yd\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}$$

Dacă se împarte relația $dx = \rho d\varphi$ la $d\varphi$, se obține:

$$dx \cdot \frac{1}{d\varphi} = \rho d\varphi \cdot \frac{1}{d\varphi}$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \rho \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\rho} = \omega$$

unde

$d\varphi$ reprezintă rotirea secțiunilor aflate la o distanță dx una față de alta.

Raportul $\frac{d\varphi}{dx}$ reprezintă rotirea specifică, notată cu ω .

Se înlocuiește relația $\frac{1}{\rho} = \omega$ în relația $\varepsilon = \frac{y}{\rho}$, și se obține:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = y \cdot \frac{1}{\rho} = y\omega$$

unde

$$\frac{1}{\rho} = \omega$$

Legea lui Hooke se scrie:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

unde

σ reprezintă tensiunea,

E este modulul de elasticitate longitudinal al materialului,

ε este deformația specifică.

Se înlocuiește în relația $\sigma = E \cdot \varepsilon$, relația $\varepsilon = y\omega$, și se obține:

$$\sigma = Ey\omega$$

Înlocuim în relația $\sigma = Ey\omega$, relația $\frac{1}{\rho} = \omega$, și se obține:

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho}$$

Relația $\sigma = Ey\omega$ reprezintă legea de variație a tensiunii pe direcția y .

Forța elementară, care acționează pe suprafața elementară dA se scrie:

$$dF = \sigma dA$$

unde

σ este tensiunea indusă de forța dF pe suprafața dA .

Nu există forțe axiale. Momentul încovoietor acționează, ca vector, pe axa OZ (Figura 6.4).

Suma forțelor pe axa OX este nulă (forțele pe direcția OX își fac echilibru) și este dată de următoarea relație:

$$\sum F_x = \int_A dF = \int_A \sigma dA = 0$$

Suma momentelor față de axa OY:

$$\sum M_{OY} = \int_A z \cdot dF = \int_A \sigma z dA = 0$$

Suma momentelor față de axa OZ:

$$\sum M_{OZ} = \int_A y \cdot dF = \int_A \sigma y dA = M$$

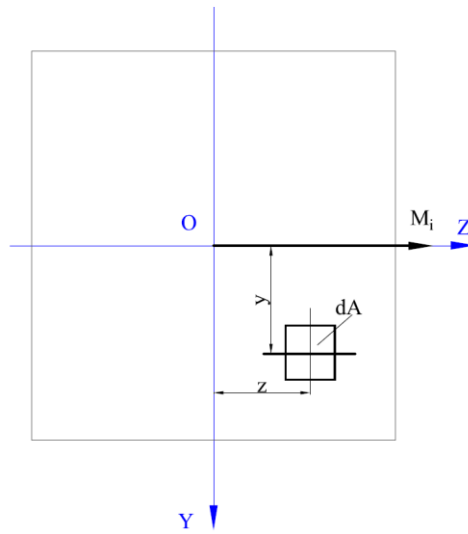


Figura 6.4

Înlocuim tensiunea cu relația $\sigma = \frac{E y}{\rho}$.

$$\int_A E \omega y dA = E \omega \int_A y dA = 0$$

$$\int_A E \omega y z dA = E \omega \int_A y z dA = 0$$

$$\int_A E \omega y^2 dA = E \omega \int_A y^2 dA = M_i$$

Ținând cont că

$$\int_A y^2 dA = I_z$$

$$\int_A yz dA = I_{yz}$$

Rezultă

$$\int_A y dA = 0$$

$$E\omega I_z = M_i$$

$$I_{yz} = 0$$

Din relația $E\omega I_z = M_i$ rezultă:

$$E\omega = \frac{M_i}{I_z}$$

Se înlocuiește în relația $\sigma = Ey\omega$, relația $E\omega = \frac{M_i}{I_z}$ și se obține:

$$\sigma = \frac{yM_i}{I_z}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{y_{\max}M_i}{I_z}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{y_{\min}M_i}{I_z}$$

Relația $\sigma = \frac{yM_i}{I_z}$ reprezintă relația lui Navier.

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

unde

W_z reprezintă modulul de rezistență al barei la încovoiere față de axa OZ.

Dacă înlocuim relația $W_z = \frac{I_z}{y}$ în relația $\sigma = \frac{yM_i}{I_z}$, se obține:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_i}{W_z}$$

Momentul de inerție axial se definește cu următoarea relație pentru o secțiune dreptunghiulară cu laturile h și b (Figura 6.1):

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$y_{\max} = \frac{h}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ mm}$$

$$y_{\min} = -\frac{h}{2} = -\frac{20}{2} = -10 \text{ mm}$$

Momentul de inerție axial este:

$$I_z = \frac{10 \cdot 20^3}{12} = 6666,66 \text{ mm}^4$$

Modulul de rezistență la încovoiere se calculează cu relația $W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$

$$W_z = \frac{6666,66}{10} = 666,66 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{12,2 \cdot 10^6}{666,66} = 1830 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{12,2 \cdot 10^6}{666,66} = -1830 \text{ N/mm}^2$$

Distribuția tensiunilor rezultate din încovoiere pe secțiunea barei este dată în Figura 6.5.

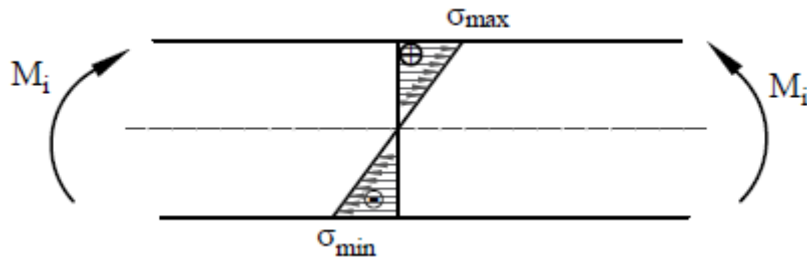


Figura 6.5.

Deformația specifică a barei se determină cu legea lui Hooke:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon = \frac{1830}{2,1 \cdot 10^5} = 0,0087 \text{ mm}$$

Formula de dimensionare a barei rezultă din înlocuirea tensiunii cu tensiunea admisibilă la încovoiere

$$W_z = \frac{M_i}{\sigma_a}$$

$$M_i = W_z \cdot \sigma_a$$

$$M_i = 666,66 \cdot 150 = 99999 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$

Dacă se cunoaște h , se poate determina b .

$$b = \frac{6W_z}{h^2}$$

$$h = \frac{6W_z}{h^2} = \frac{6 \cdot 666,66}{400} = 9,99 \text{ mm}$$

Problema 2. O bară din oțel, marca C45 N (oțel carbon normalizat cu 0,45% carbon, conform SR EN ISO 683-1:2018), cu secțiunea transversală circulară este solicitată de momentul încovoietor M_i .

Se dă: diametrul $D = 25 \text{ mm}$,

momentul încovoietor, $M_i = 6,2 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$,

modulul de elasticitate longitudinal al oțelului, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$,

tensiunea admisibilă a oțelului la încovoiere $\sigma_a = 145 \text{ MPa}$.

σ_a este tensiunea admisibilă a materialului barei la solicitarea de încovoiere și se calculează astfel:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{s}$$

unde

σ_r este limita de rupere la încovoiere și tracțiune (pentru oțeluri),

s este coeficientul de siguranță la solicitare statică de încovoiere.

Se cere:

distanța de la dreapta ab din Figura 6.5 la axa OX ,

momentul de inerție axial al barei,

modulul de rezistență la încovoiere al barei,

să se determine tensiunea maximă și minimă produsă în bară,

să se determine deformația specifică a barei după aplicarea momentului încovoietor,

să se verifice bara din oțel la încovoiere (să se calculeze coeficientul de siguranță) dacă bara este solicitată cu momentul încovoietor M_i .

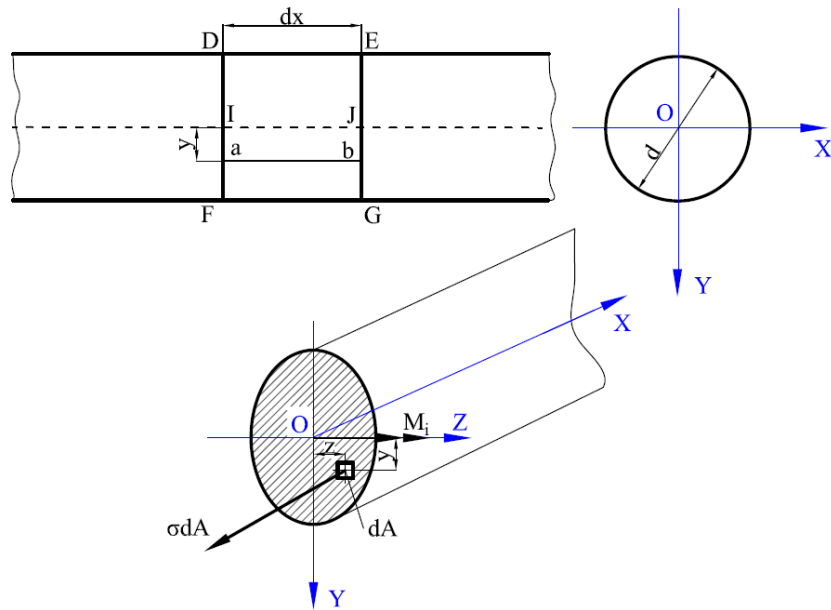


Figura 6.6

$$y_{\max} = \frac{D}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ mm}$$

$$y_{\min} = -\frac{D}{2} = -\frac{25}{2} = -12,5 \text{ mm}$$

Momentul de inerție axial pentru o secțiune circulară se definește cu următoarea relație:

$$I_z = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$I_z = \frac{\pi \cdot 25^4}{64} = 19174,75 \text{ mm}^4$$

Modulul de rezistență la încovoiere se calculează cu următoarea relație:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

Se înlocuiește relația $y_{\max} = \frac{D}{2}$ și relația $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$ în relația $W_z = \frac{I_z}{y}$ și se obține:

$$W_z = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32}$$

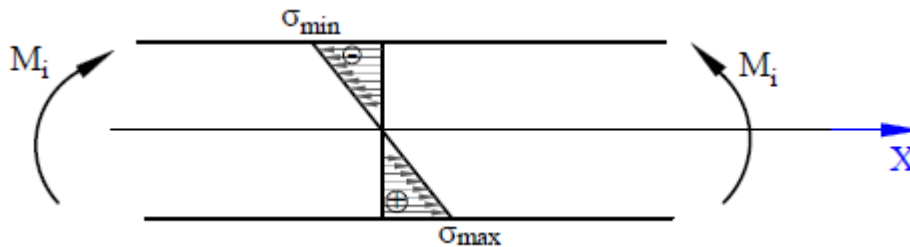
$$W_z = \frac{\pi \cdot 25^3}{32} = 122,72 \text{ mm}^3$$

Tensiunea maximă și minimă se determină cu următoarea relație:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_i}{W_z}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{6,2 \cdot 10^3}{122,72} = 50,52 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\min} = -50,52 \text{ N/mm}^2$$



Deformația specifică a barei se determină cu legea lui Hooke, care se scrie astfel:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Din relația $\sigma = E \cdot \varepsilon$ rezultă că deformația specifică este egală cu:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon = \frac{50,52}{2,1 \cdot 10^5} = 0,00024 \text{ mm}$$

Formula de verificare față de tensiunea admisibilă la încovoiere:

$$\sigma = \frac{M}{W_z} \leq \sigma_a$$

$$\sigma = \frac{6,2 \cdot 10^3}{122,72} = 50,52 \text{ MPa} \leq \sigma_a$$

Coeficientul de siguranță la încovoiere va fi:

$$s = \frac{\sigma_a}{\sigma} = \frac{145}{50,52} = 2,87$$

Valoarea coeficientului de siguranță este în domeniul recomandat pentru solicitări statice $ss \geq 1,5 \dots 2$.

Problema 3. Bara din figura 6.7a, cu secțiunea transversală dreptunghiulară (Figura 6.7b), este solicitată de forța F . Bara este simplu rezemată și este din lemn.

Se dă:

- forța $F = 4000 \text{ N}$,
- lungimea $l_1 = 2 \text{ m} = 2000 \text{ mm}$,
- lungimea $l_2 = 2 \text{ m} = 2000 \text{ mm}$,
- lățimea secțiunii barei, $b = 12 \text{ mm}$,
- înălțimea secțiunii barei, $h = 24 \text{ mm}$,
- modulul de elasticitate longitudinal (lemn) $E = 3 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$.

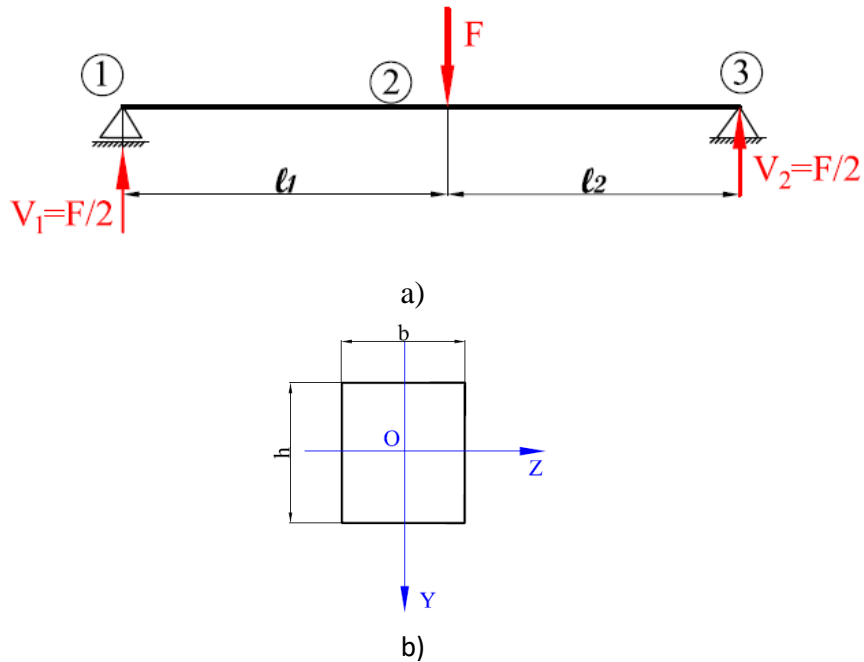
Se cere:

- să se construiască diagrama forțelor tăietoate,
- să se construiască diagrama momentului încovoietor,
- să se determine momentul de inerție axial, față de axa OZ și OY ,
- să se determine modulul de rezistență la încovoiere,
- să se determine tensiunile normale în secțiunea barei și să se construiască diagrama variației tensiunii.

Rezolvare

Etapele de rezolvare pentru o astfel de problemă sunt:

- scrișta barei cu solicitări exterioare și notarea secțiunilor importante (reazeme, puncte de aplicare a forțelor),
- calculul reacțiunilor,
- digrame de momente încovoietoare.
- calculul tensiunilor în punctele principale, aici pentru punctul 2 în care momentul încovoietor este maxim.



Determinarea reacțiunilor considerându-se că bara este în echilibru.
Suma momentelor față de punctul 1 este zero.

$$\sum M_{i(1)} = 0 \Rightarrow F \cdot l_1 - V_2(l_1 + l_2) = 0$$

$$F \cdot l_1 = V_2(l_1 + l_2)$$

$$V_2 = \frac{F \cdot l_1}{l_1 + l_2}$$

$$V_2 = \frac{4000 \cdot 2}{2 + 2} = \frac{8000}{4}$$

$$V_2 = 2000 \text{ N}$$

Suma momentelor față de punctul 3 este zero.

$$\sum M_{i(3)} = 0 \Rightarrow V_1(l_1 + l_2) - F \cdot l_2 = 0$$

$$V_1(l_1 + l_2) = F l_2$$

$$V_1 = \frac{F \cdot l_2}{l_1 + l_2}$$

$$V_1 = \frac{4000 \cdot 2000}{2000 + 2000} = 2000 \text{ N}$$

$$V_1 = 2000 \text{ N}$$

Verificarea calculelor constă în verificarea echilibrului forțelor pe direcție verticală (suma forțelor ce acționează asupra barei):

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_1 - F + V_2 = 0$$
$$2000 - 4000 - 2000 = 0 \text{ (se verifică)}$$

Determinarea forțelor tăietoare:

$$T_{1\text{stânga}} = 0$$

$$T_{1\text{dreapta}} = V_1 = 2000 \text{ N}$$

$$T_{2\text{stânga}} = V_1 = 2000 \text{ N}$$

$$T_{2\text{dreapta}} = V_1 - F = 2000 - 4000 = -2000 \text{ N}$$

$$T_{3\text{stânga}} = V_1 - F = 2000 - 4000 = -2000 \text{ N}$$

$$T_{3\text{dreapta}} = V_1 - F + V_1 = 2000 - 4000 - 2000 = 0$$

Determinarea momentelor încovoietoare:

$$M_1 = 0$$

$$M_{i(2)} = 0 = V_1 \cdot l_1 = 2000 \cdot 2 = 4000 \text{ Nm}$$

$$M_{i(2)} = 0 = V_1(l_1 + l_2) - F \cdot l_2$$

$$M_{i(3)} = 0 = 2000(2 + 2) - 4000 \cdot 2 = 0$$

Secțiunea periculoasă este secțiunea 2 pentru că momentul încovoietor este maxim și dimensionarea barei se face în această secțiune, secțiune în care acționează momentul încovoietor maxim, $M_{i(2)} = 4000 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Figura 6.8 prezintă încărcarea barei, diagrama de forțe tăietoare și diagrama de momente. Această reprezentare se poate face pentru orice problemă cu bare drepte.

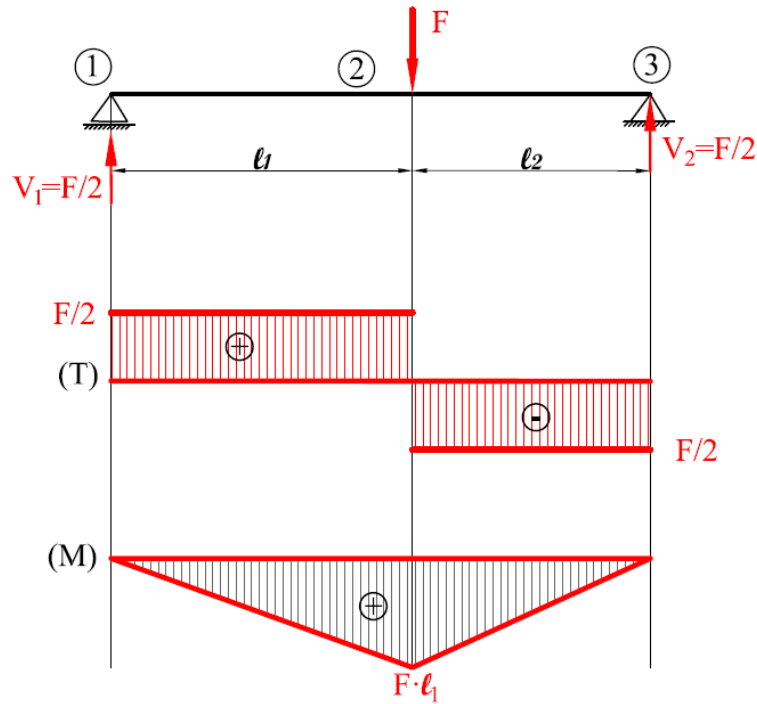


Figura 6.9

În secțiunea 2 există forța tăietoare F .

Momentul de inerție axial față de axa OZ se definește cu următoarea relație:

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_z = \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 13840 \text{ mm}^4$$

$$y_{\max 1} = \frac{h}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ mm}$$

$$y_{\min 2} = -\frac{h}{2} = -\frac{24}{2} = -12 \text{ mm}$$

Modulul de rezistență la încovoiere se calculează cu următoarea relație:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

$$W_z = \frac{13840}{12} = 1153,33 \text{ mm}^3$$

Tensiunea maximă și minimă în secțiunea barei în punctul 2 se determină cu următoarea relație:

$$\sigma_{\max_2} = \frac{M_{i\max}}{W_z}$$

$$\sigma_{\max_2} = \frac{12 \cdot 4000}{1153,33} = 41,61 \text{ N/mm}^2 \text{ (tracțiune)}$$

$$\sigma_{\min_2} = \frac{M_{i\max}}{W_z}$$

$$\sigma_{\min_2} = \frac{-12 \cdot 4000}{766,99} = -41,61 \text{ N/mm}^2 \text{ (compresiune)}$$

În Figura 6.9 sunt reprezentate graficele tensiunii și deformației relative, rezultate din încovoiere cu momentul M_i .

Legea lui Hooke este:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_{\max_2} = \frac{\sigma_{\max}}{E}$$

$$\varepsilon_{\max_2} = \frac{41,61}{3 \cdot 10^4} = 0,0013 \text{ (tracțiune)}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{\min}}{E}$$

$$\varepsilon_{\max_2} = \frac{-41,61}{3 \cdot 10^4} = -0,0013 \text{ (compresiune)}$$

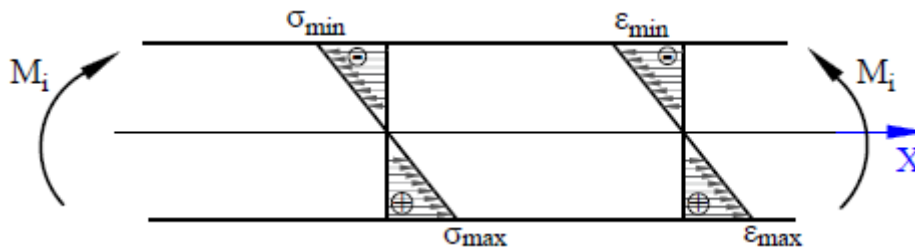


Figura 6.10

CAPITOLUL 7.
DIAGrame DE EFORTURI LA BARE DREPTE

Problema 1. Să se construiască diagrama forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare pentru bara solicitată ca în Figura 7.1.

Se cunosc:

$$F = 12000 \text{ N},$$
$$l = 2 \text{ m}.$$

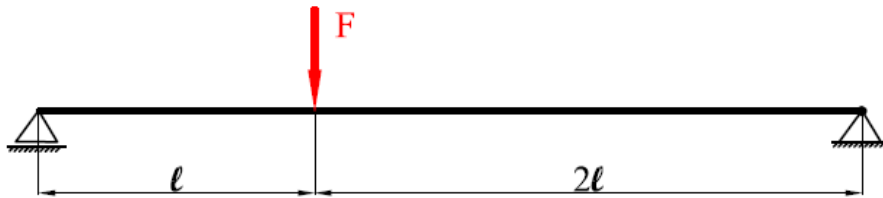


Figura 7.1

Rezolvare

Pasul 1. Se notează secțiunile importante ale barei (Figura 7.2).

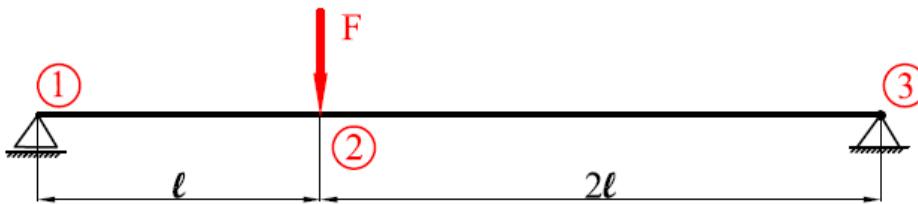


Figura 7.2

Pasul 2. Determinarea forțelor care acționează asupra barei.

În secțiunea 1 bara este simplu rezemată.

În secțiunea 2 bara este încărcată cu o forță F.

În secțiunea 3 bara este rezemată într-o articulație simplă.

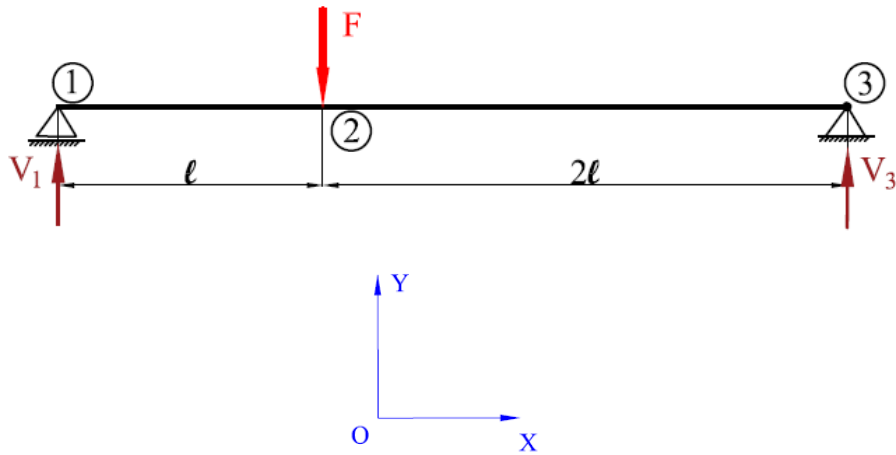


Figura 7.3

Pasul 3.

Scrierea ecuațiilor de echilibru pentru determinarea reacțiilor (Figura 7.3).

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_i &= 0 \quad (i = 1,3)\end{aligned}$$

Suma momentelor (în centimetri) față de punctul 1 și, respectiv 3, este zero.

Pasul 4. Determinarea reacțiilor cu ajutorul ecuațiilor de momente față de reazeme.

Se calculează suma momentelor în secțiunea 1 (suma momentelor față de punctul 1 este zero).

$$\sum M_1 = 0$$

$$F \cdot l - V_3(l + 2l) = 0$$

$$F \cdot l = 3l \cdot V_3$$

$$V_3 = \frac{F \cdot l}{3l}$$

$$V_3 = \frac{12 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{24}{6}$$

$$V_3 = 4 \text{ N}$$

Se calculează suma momentelor în secțiunea 3 (suma momentelor față de punctul 3 este zero).

$$\sum M_3 = 0$$

$$V_1 \cdot 3l - F \cdot 2l = 0$$

$$3l \cdot V_1 = 3l \cdot F$$

$$V_1 = \frac{2l \cdot F}{3l}$$

$$V_1 = \frac{12 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{48}{6}$$

$$V_1 = 8 \text{ N}$$

Pasul 5. Verificarea calculelor constă în verificarea echilibrului forțelor pe direcția fiecărei axe OX și OY.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$V_1 - F + V_3 = 0$$

$$8 - 12 + 4 = 0$$

Pasul 6. Determinarea forțelor tăietoare.

$$T_{12} = V_1 \text{ (suma forțelor tăietoare din stânga secțiunii 12)}$$

$$T_{23} = V_1 - F$$

$$T_{23} = 8 - 12$$

$$T_{23} = -4 \text{ N}$$

Trasarea diagramei forței tăietoare se face ca în Figura 7.4.

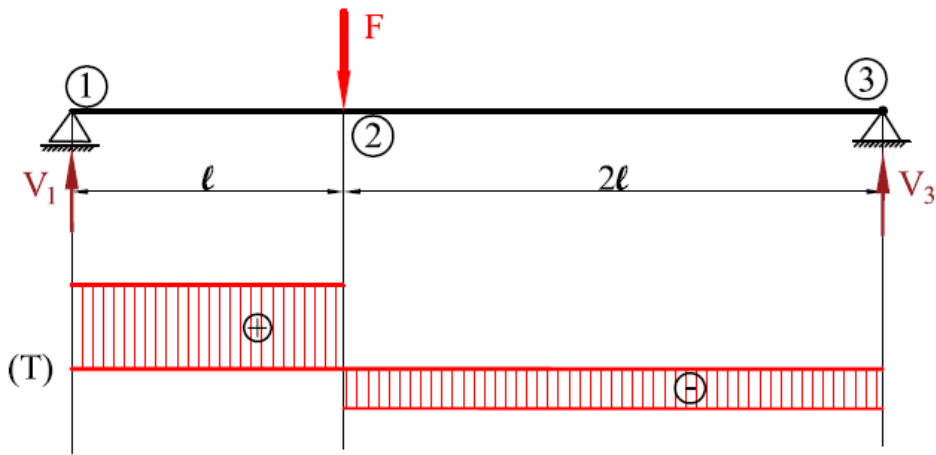


Figura 7.4

Pasul 8. Determinarea momentului încovoietor necesare pentru trasarea diagramei de momente.

Momentul încovoietor în secțiunea x_1 situată pe bară, între punctele 1 și 2 este:

$$M_{x_1} = M_{12} = V_1 \cdot x_1$$

$$x_1 \in [0; 2]$$

Pentru punctul 1, $x_1 = 0$

$$M_1 = 0$$

Pentru punctul 2, $x_1 = l = 2 \text{ m}$

$$M_2 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Momentul încovoietor în secțiunea x_2 din tronsonul 2-3 este:

$$M_{x_2} = M_{23} = V_1 \cdot x_2 - F(x_2 - 2)$$

$$x_2 \in [2; 6]$$

pentru punctul 2, $x_2 = l = 2 \text{ m}$

$$M_2 = 8 \cdot 2 - 12(2 - 2) = 16 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pentru punctul 3, $x_3 = 2 \cdot l = 3 \text{ m}$

$$M_3 = 8 \cdot 6 - 12(6 - 2) = 0$$

Diagrama de momente încovoietoare este dată în Figura 7.6.

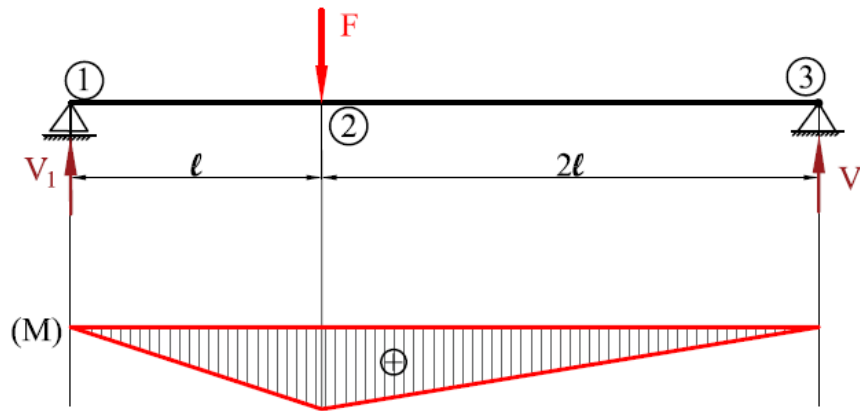


Figura 7.5

În Figura 7.6 este dată diagrama forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare. În rezolvarea problemelor de acest fel informația discutată în Figurile 7.1 până la Figura 7.5 se condensează într-o singură figură, Figura 7.6. Figurile de la 7.1 până la 7.5 sunt date în această culegere de probleme în scop didactic. Rezultate problemei pot fi date pe o singură figura ca în Figura 7.6.

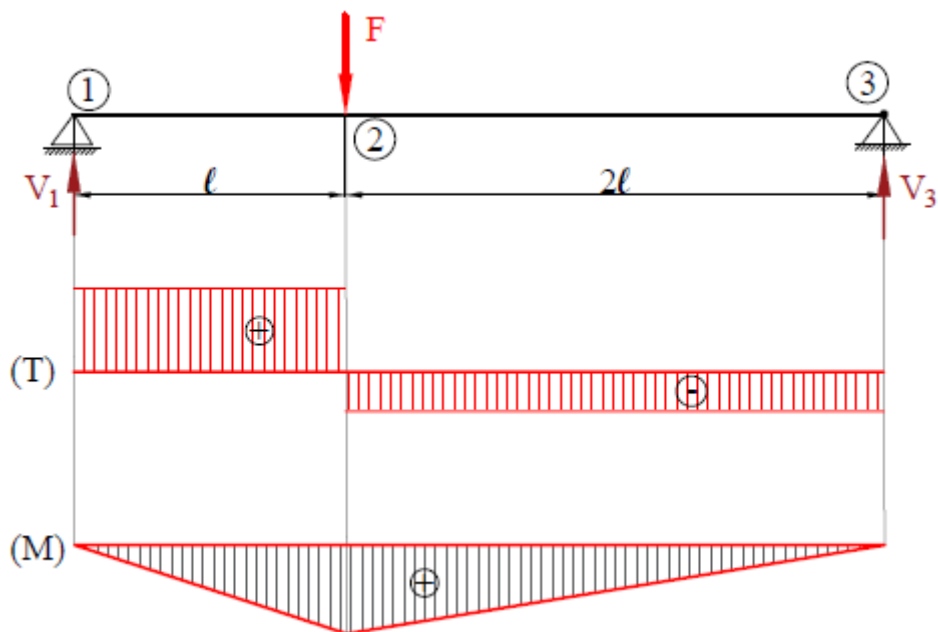


Figura 7.6

Problema 2. Să se construiască diagrama forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare pentru bara sollicitată ca în Figura 7.7.

Se cunosc:

$$F = 4000 \text{ N}$$

$$L = 4 \text{ m}$$

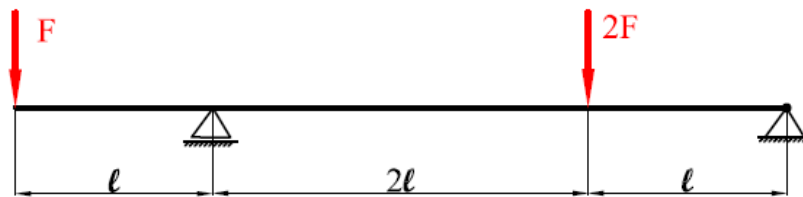


Figura 7.7

Rezolvare

Pasul 1. Se notează secțiunile importante ale barei (Figura 7.8.).

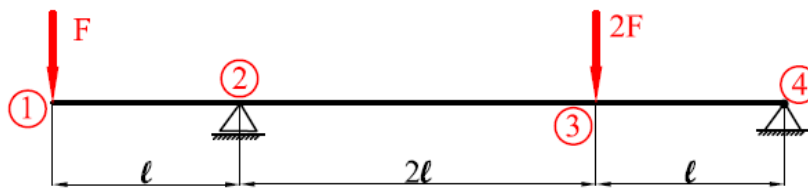


Figura 7.8

Pasul 2. Determinarea forțelor care acționează asupra barei, în plan vertical.

În secțiunea 1 bara este încărcată de o forță F .

În secțiunea 2 bara este simplu rezemată.

În secțiunea 3 bara este încărcată cu o forță, $2F$.

În secțiunea 4 bara are o articulație plană.

Pasul 3. Scrierea ecuațiilor de echilibru pentru determinarea reacțiilor.

$$\sum F_y = 0$$
$$\sum M_i = 0 \quad (i = 2 \text{ și } 4)$$

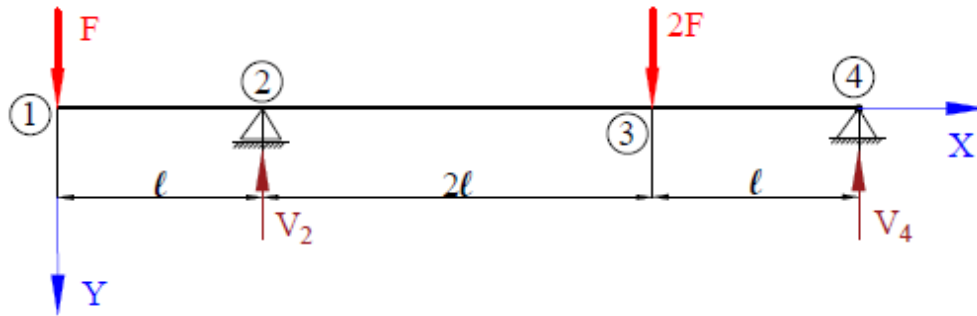


Figura 7.9

Pasul 4. Determinarea reacțiunilor cu ajutorul ecuațiilor de momente față de rezeme.

Se calculează suma momentelor în secțiunea 2.

$$\begin{aligned} \sum M_2 &= 0 \\ -F \cdot l + 2F \cdot 2l - V_4(2l + l) &= 0 \\ -F \cdot l + 2F \cdot 2l &= V_4 \cdot 3l \\ V_4 &= \frac{-F \cdot l + 2F \cdot 2l}{3l} = \frac{-F \cdot l + 4F \cdot l}{3l} = \frac{3F \cdot l}{3l} = F \\ V_4 &= 4000 \text{ N} \end{aligned}$$

Se calculează suma momentelor în secțiunea 4.

$$\begin{aligned} \sum M_4 &= 0 \\ -F(1 + 2l + l) + V_2(2l + l) - 2F \cdot 2 &= 0 \\ -F \cdot 4l + V_2 \cdot 3l - 2F \cdot l &= 0 \\ V_2 \cdot 3l &= F \cdot 4l + 2F \cdot l \\ V_2 &= \frac{F \cdot 4l + 2F \cdot l}{3l} = \frac{6F \cdot l}{3l} = 2F \\ V_2 &= \frac{4000 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4000 \cdot 4}{3 \cdot 4} = 8000 \text{ N} \\ V_2 &= 8000 \text{ N} \end{aligned}$$

Pasul 5. Verificarea rezultatelor cu ecuațiile de echilibru.

$$\sum F_y = 0$$

$$F - V_2 + 2F - V_4 = 0$$

$$4000 - 8000 + 2 \cdot 4000 = 0$$

Pasul 6. Determinarea forțelor tăietoare.

$$T_{12} = -F(\text{suma forțelor tăietoare din stânga secțiunii 12})$$

$$T_{12} = -4000 \text{ N}$$

$$T_{23} = -F + V_2$$

$$T_{23} = -4000 + 8000 = 4000 \text{ N}$$

$$T_{34} = -F + V_2 - 2F$$

$$T_{34} = -4000 + 8000 - 2 \cdot 4000 = -4000 \text{ N}$$

Trasarea diagramei forței tăietoare este realizată în Figura 7.10.

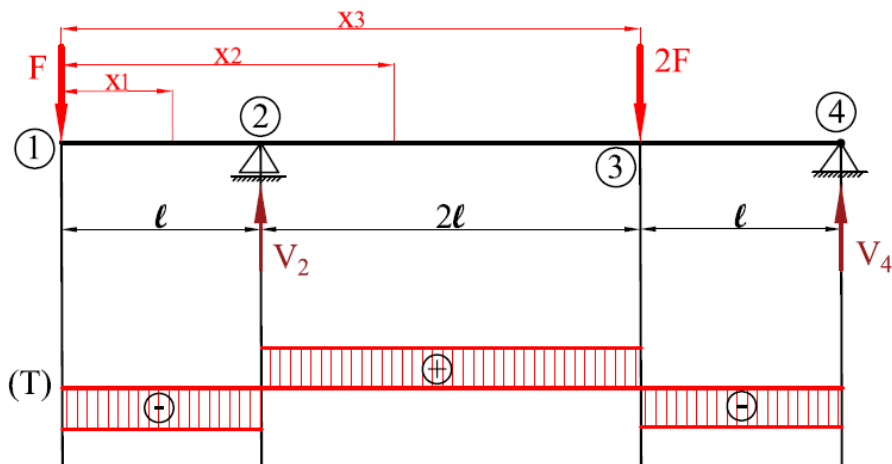


Figura 7.10

Pasul 8. Determinarea momentelor încovoietoare necesare pentru trasarea diagramei de momente.

Momentul încovoietor în secțiunea x_1 din tronsonul 1-2, față de punctul 2, este:

$$M_{x_1} = M_{12} = -F \cdot x_1$$

$$x_1 \in [0; 4]$$

Pentru punctul 1, $x_1 = 0$

$$M_1 = 0$$

Pentru punctul 2, $x_1 = l = 4$ m

$$M_2 = -4000 \cdot 4 = 16000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Momentul încovoietor în secțiunea x_2 , situată între punctele 2 și 3, față de punctu 2, este:

$$M_{x_2} = M_{23} = -F \cdot x_2 + V_2(x_2 - 4)$$

$$x_2 \in [4; 12]$$

pentru punctul 2, $x_2 = l = 4$ m

$$M_2 = -4000 \cdot 4 + 8000(4 - 4) = -16000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pentru punctul 3, $x_2 = 12$ m

$$M_3 = -4000 \cdot 12 + 8000(12 - 4) = 16000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Momentul încovoietor în secțiunea x_3 din tronsonul 3-4, față de punctul 2, este:

$$M_{x_3} = M_{23} = -F \cdot x_3 + V_2(x_3 - l) - 2F(x_3 - 3l)$$

$$x_2 \in [12; 16]$$

pentru punctul 3, $x_3 = l = 12$ m

$$M_3 = -4000 \cdot 12 + 8000(12 - 4) - 2 \cdot 4000(12 - 12) = 16000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pentru punctul 3, $x_4 = 16$ m

$$M_4 = -4000 \cdot 16 + 8000(16 - 4) - 2 \cdot 4000(16 - 12) = 0$$

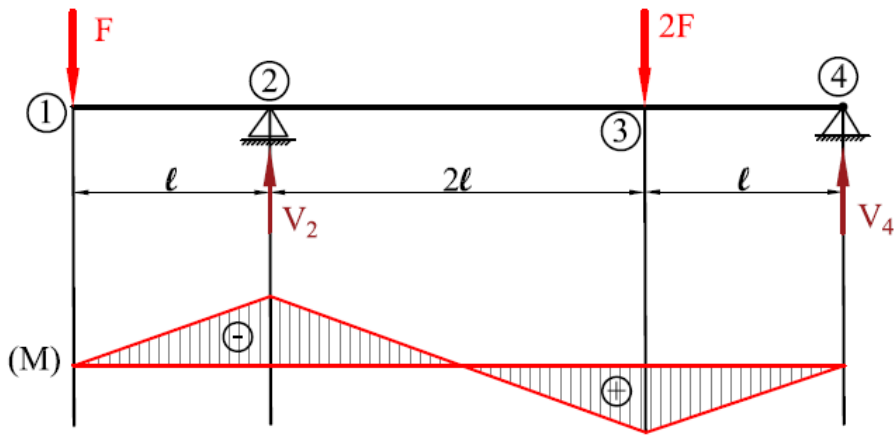


Figura 7.12

În Figura 7.13 este dată diagrama forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare.

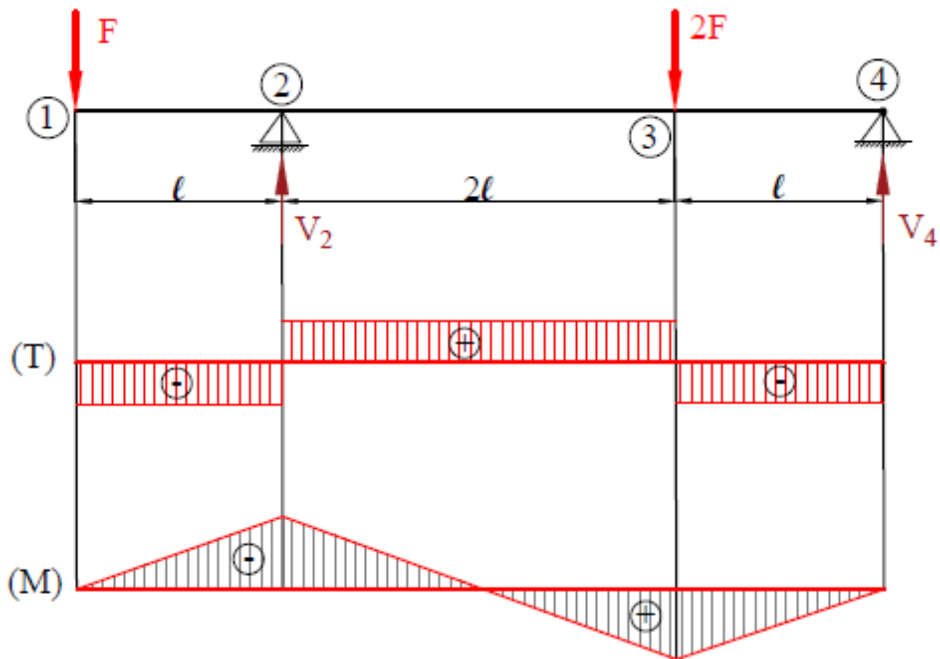


Figura 7.13

Problema 3. Să se construiască diagrama forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare pentru bara din Figura 7.14.

Se cunosc:

$$q = 6000 \text{ N/m}$$

$$l = 3 \text{ m}$$

q este o sarcină uniform distribuită pe unitatea de lungime.

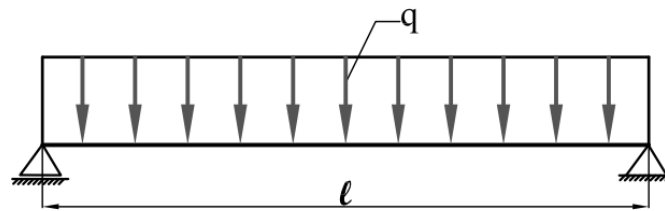


Figura 7.14

Rezolvare

Pasul 1. Se notează secțiunile bare (Figura 7.15)

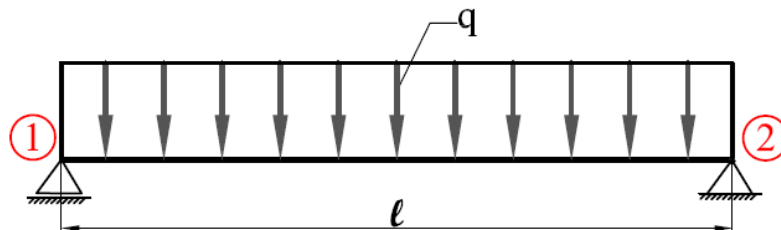


Figura 7.15

Pasul 2. Determinarea reacțiilor (Figura 7.16).

Forța totală aplicată asupra barei este $q \cdot l$.

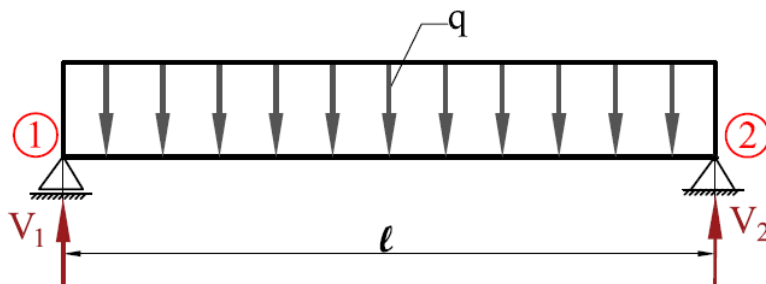


Figura 7.16

Reacțiunile V_1 și V_2 sunt egale deoarece sarcina distribuită este echivalentă cu o forță care acționează la jumătatea distanței pe care acționează sarcina distribuită.

$$V_1 = V_2 = \frac{q \cdot l}{2}$$
$$V_1 = V_2 = \frac{6000 \cdot 3}{2} = 9000 \text{ N}$$

Pasul 3. Determinarea forțelor tăietoare.

Pentru secțiunea x , forța tăietoare se scrie pe tronsonul de lungime x (Figura 7.17).

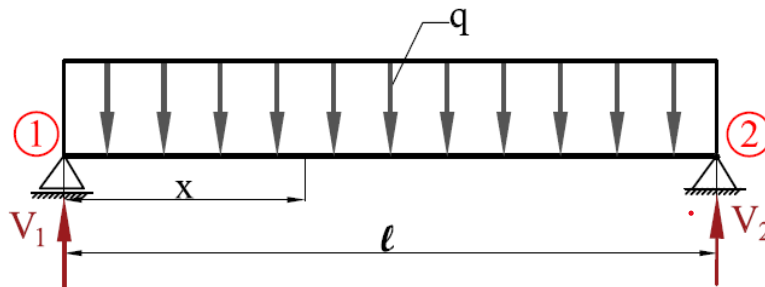


Figura 7.17

$$T_x = V_1 - q \cdot x$$

$$x \in [0; 3]$$

Pentru punctul 1, $x = 0$

$$T_1 = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot 0 = \frac{q \cdot l}{2}$$

$$T_1 = V_1 = 9000 \text{ N}$$

Pentru punctul 2, $x = l = 3 \text{ m}$

$$T_2 = \frac{q \cdot l}{2} - q \cdot l = -\frac{q \cdot l}{2}$$

$$T_2 = -V_2 = -9000 \text{ N}$$

Trasarea diagramei forței tăietoare (Figura 7.18).

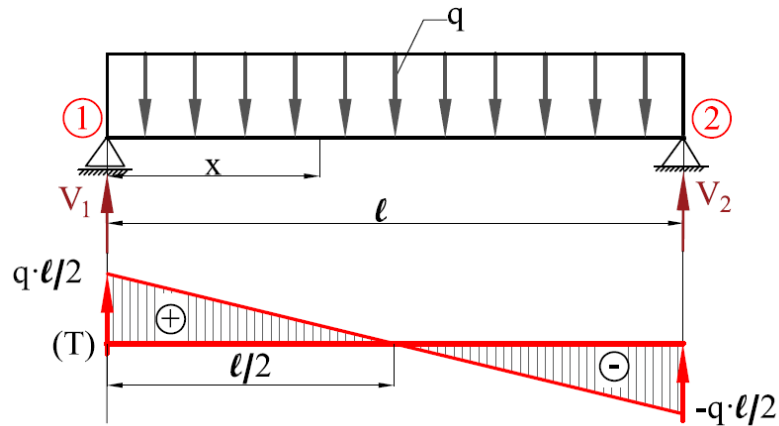


Figura 7.18

Pasul 8. Determinarea momentului încovoietor necesare pentru trasarea diagramei (Figura 7.19).

Momentul încovoietor în secțiunea x din secțiunea 1-2 este:

$$M_x = V_1 \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q}{2} x^2 \text{ (variație parabolică)}$$

Pentru punctul 1, $x = 0$

$$M_1 = 0$$

Pentru punctul 2, $x = l = 3 \text{ mm}$

$$M_2 = 0$$

La mijlocul barei forța tăietoare este nulă și momentul încovoietor este maxim.

$$M_{\max} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

$$M_{\max} = \frac{6000 \cdot 3^2}{8} = 6750 \text{ N} \cdot \text{m}$$

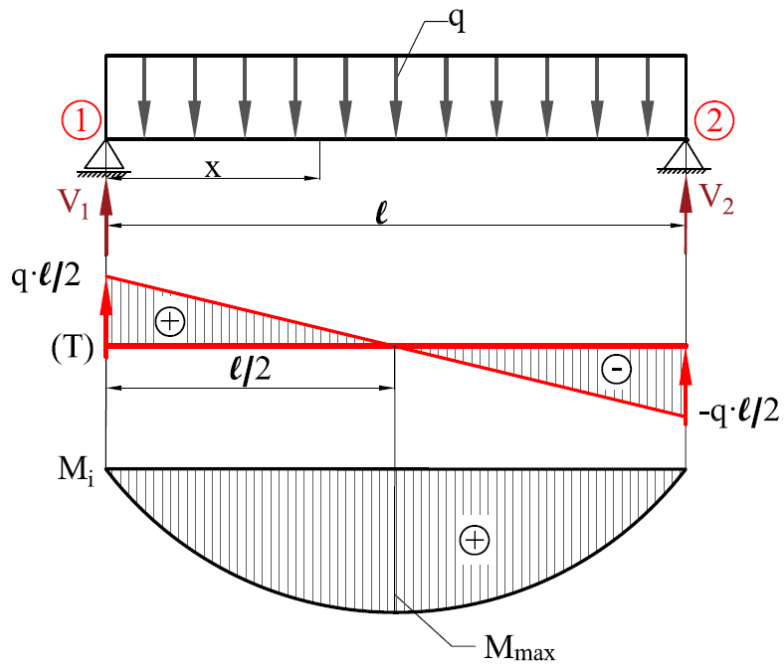


Figura 7.19

Problema 4. Să se construiască diagrama forțelor tăietoare și a momentelor încovoietoare pentru bara din Figura ?.

Rezolvare

Se cunosc

$$q = 6000 \text{ N/m, valoare maximă a sarcinii triunghiulare}$$

$$l = 3 \text{ m}$$

q este o sarcină triunghiulă.

Pasul 1. Se notează secțiunile barei (Figura 7.20).

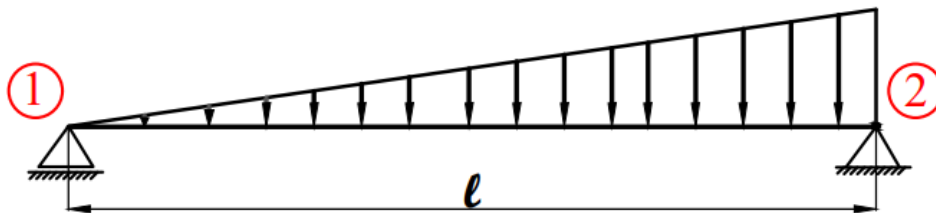


Figura 7.20

Pasul 2. Se determină reacțiunile (Figura 7.21)

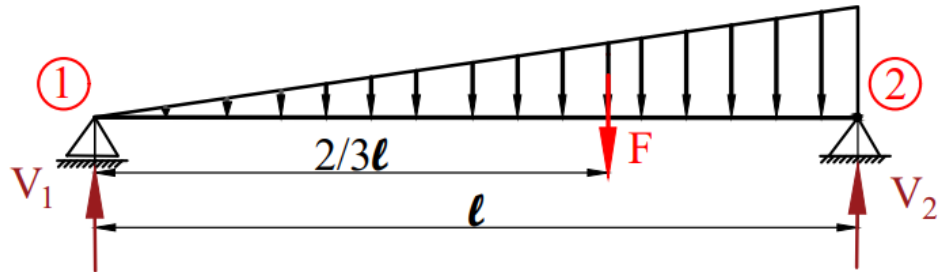


Figura 7.21

Forța totală este $\frac{q \cdot l}{2}$. Forța totală acționează în centrul de greutate al triunghiului de încărcare, adică la distanța $2l/3$.

$$\begin{aligned} \sum M_{(1)} &= 0 \\ F \cdot \frac{2}{3} \cdot l - V_2 \cdot l &= 0 \\ \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l &= V_2 \cdot l \\ \frac{q \cdot l^2}{3} &= V_2 \cdot l \\ V_2 &= \frac{q \cdot l}{3} \\ V_2 &= \frac{9000 \cdot 3}{3} = 9000 \text{ N} \\ \sum M_{(2)} &= 0 \\ V_1 \cdot l - F \cdot \frac{1}{3} \cdot l &= 0 \\ V_1 \cdot l &= \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ V_1 \cdot l &= \frac{q \cdot l^2}{6} \\ V_1 &= \frac{q \cdot l}{6} \\ V_1 &= \frac{9000 \cdot 3}{6} = 4500 \text{ N} \end{aligned}$$

Pasul 3. Verificarea calculelor cu ecuație de echilibru a forțelor pe axa OY (Figura 7.22).

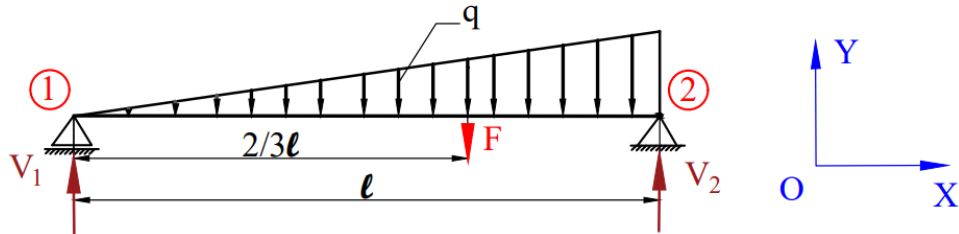


Figura 7.22

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ V_1 - F + V_2 &= 0 \\ F &= \frac{q \cdot l}{2} = \frac{9000 \cdot 3}{2} = \frac{27000}{2} = 13500 \text{ N} \\ 4500 - 13500 + 9000 &= 0\end{aligned}$$

Pasul 4. Determinarea forțelor tăietoare în secțiunea x (Figura 7.23), sarcina distribuită triunghiulară are valoarea $q_x = \frac{x}{2} \cdot q$ (Figura 7.24).

Forța tăietoare se anulează ($T = 0$) și poziția ei se determină cu relația

$$\begin{aligned}T &= \frac{q \cdot l}{6} - \frac{q}{2 \cdot l} \cdot x^2 = 0 \\ \frac{q \cdot l}{6} - \frac{q}{2 \cdot l} \cdot x^2 &= 0 \\ \frac{q}{2 \cdot l} \cdot x^2 &= \frac{q \cdot l}{6} \\ x^2 &= \frac{q \cdot l}{6} \cdot \frac{2 \cdot l}{q} \\ x^2 &= \frac{l^2}{3} \\ x &= \sqrt{\frac{l^2}{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Din asemănarea triunghiurilor cu înălțimea q_x și q , rezultă:

$$\frac{q_x}{x} = \frac{q}{l}$$

$$q_x = q \cdot \frac{x}{l}$$

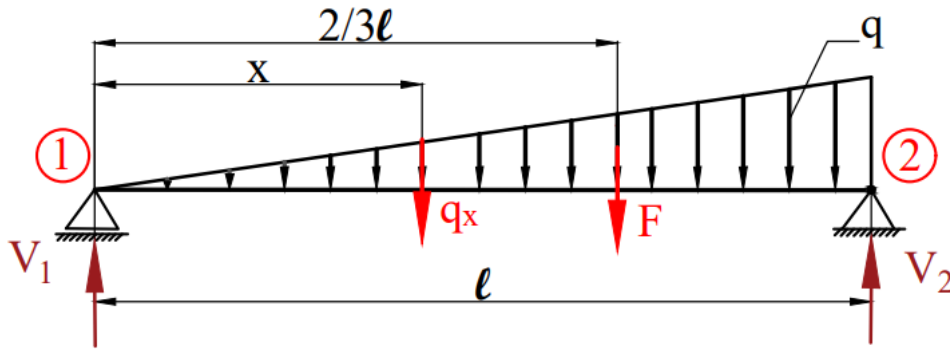


Figura 7.23

$$T_x = V_1 - \frac{q_x \cdot x}{2}$$

$$T_x = \frac{q \cdot l}{6} - \frac{x}{l} \cdot q = \frac{q \cdot l}{6} - \frac{x}{l} \cdot q \cdot \frac{x}{2}$$

$$T_x = \frac{q \cdot l}{6} - \frac{x^2}{2l} \cdot q \text{ (variație parabolică)}$$

pentru $x = 0$

$$T_1 = \frac{q \cdot l}{6} = \frac{9000 \cdot 3}{6} = 4500 \text{ N}$$

pentru $x = l$

$$T_2 = \frac{q \cdot l}{6} - \frac{l^2}{2l} \cdot q = \frac{q \cdot l}{6} - \frac{l \cdot q}{2}$$

$$T_2 = \frac{q \cdot l - 3l \cdot q}{6} = -\frac{2}{6} \cdot l \cdot q = -\frac{1}{3} \cdot l \cdot q$$

$$T_2 = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 9000 = -9000 \text{ N}$$

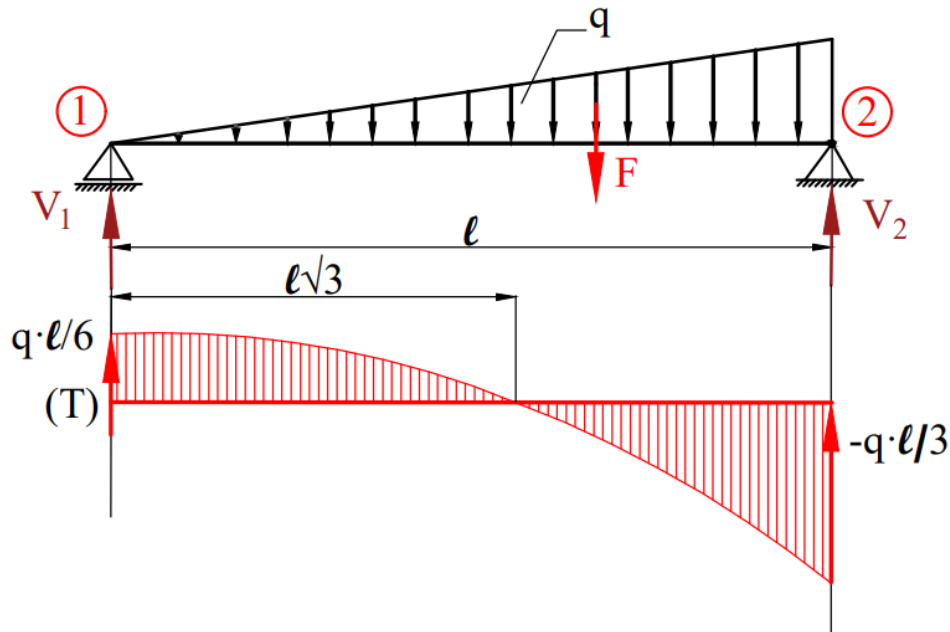


Figura 7.24

Pasul 4. Determinarea momentului încovoietor pe lungimea barei, la distanța x față de reazemul 1 (Figura 7.25)

$$M_{i(x)} = V_1 \cdot x - \frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{q \cdot l}{6} \cdot x - \frac{2}{6 \cdot l} \cdot x^3$$

pentru $x = 0$

$$M_{i1} = 0$$

pentru $x = l$

$$M_{i2} = 0$$

$$\frac{q \cdot l}{6} \cdot l - \frac{2}{6 \cdot l} \cdot l^3 = 0$$

$$M_{i(x)} = \frac{q \cdot l}{6} \cdot x - \frac{q}{6 \cdot l} \cdot x^3$$

$M_{i(x)\max}$ se obține pentru $\frac{dM_{i(x)}}{dx} = 0$

$$\frac{q \cdot l}{6} - \frac{3 \cdot q \cdot x^2}{6 \cdot l} = 0$$

$$l - \frac{3 \cdot x^2}{l} = 0$$

$$l^2 - 3 \cdot x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{l}{\sqrt{3}}$$

Soluția reală este $x_1 = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

Momentul maxim este la $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$

$$M_{\text{imax}} = \frac{q \cdot l^2}{6\sqrt{3}} - \frac{q \cdot l^2}{27\sqrt{3}} = \frac{q \cdot l^2}{9\sqrt{3}} = \frac{9000 \cdot 3^2}{9\sqrt{3}} = \frac{9000}{\sqrt{3}} \text{ N} \cdot \text{m}$$

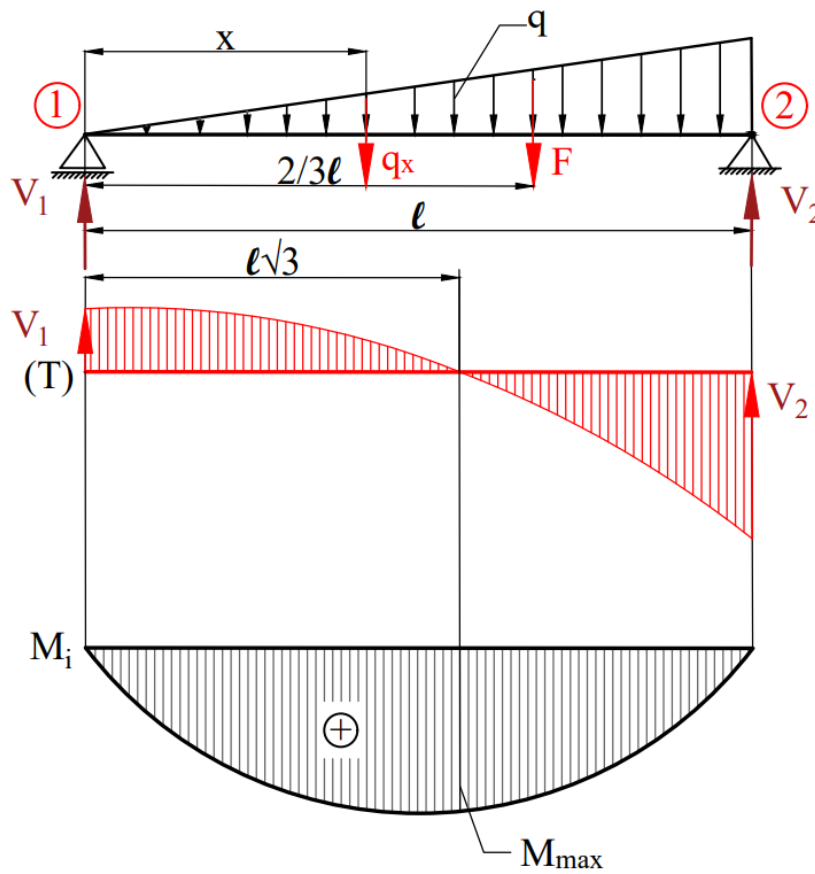


Figura 7.25

BIBLIOGRAFIE

1. Andreescu I., Mocanu Ș., Compendiu de Rezistența Materialelor. Editura Matrix Rom, București, 2005
2. Bolcu A., Teză de doctorat, Contribuții la studiul comportamentului mecanic al materialelor compozite, cu aplicații la automobile, Craiova, 2018
3. Budugan G., Rezistența materialelor, Editura tehnică, București, 1980
4. Buzdugan G., Rezistența materialelor, Editura Academiei, 1986
5. Buzescu F., Elemente de mecanică teoretică, http://www.tex.tuiasi.ro/biblioteca/carti/CURSURI/Prof.%20Dr.%20Ing.%20Florina%20%20Buzescu/Elemente%20de%20mecanica%20teoretica/04_Capitolul%201_Cinematica%20punctului.pdf
6. Faur N., Mecanica materialelor, Politehnica, 2005
7. Huidu T., Marin C., Probleme rezolvate de mecanică, Editura Macarie, Târgoviște, 2001
8. Luca D., Stan C., Mecanica Clasică, 2007, http://newton.phys.uaic.ro/data/pdf/Mecanica_clasica.pdf
9. Măcuță S. D., Elemente de inginerie mecanică, Note de curs, 2010
10. Mocanu F., Rezistența materialelor, Partea I, <https://mec.tuiasi.ro/diverse/FMRM1.PDF>
11. Morariu-Gligor R. M., Haiduc N., Mecanica, Curs pentru studenți, UT PRESS, Cluj-Napoca, 2017
12. Munteniță C., Dragomir Bălănică C. M., Podaru G. M., Elemente de inginerie mecanică, Editura Fundației Universitare, Galați, 2019
13. Niculae M. Bazele mecanicii aplicate, Partea a II-a. Statica, [http://cat.mec.pub.ro/archive/Bazele%20Mecanicii%20Aplicate%20\(3\)%20-%20STATICA.pdf](http://cat.mec.pub.ro/archive/Bazele%20Mecanicii%20Aplicate%20(3)%20-%20STATICA.pdf)
14. Niculae M. Bazele mecanicii aplicate, Partea III-a Cinematica, [http://cat.mec.pub.ro/archive/Bazele%20Mecanicii%20Aplicate%20\(4\)%20-%20CINEMATICA.pdf](http://cat.mec.pub.ro/archive/Bazele%20Mecanicii%20Aplicate%20(4)%20-%20CINEMATICA.pdf)

15. Niculae M., Bazele mecanicii aplicate, Partea IV-a Cinematica
[http://cat.mec.pub.ro/archive/Bazele%20Mecanicii%20Aplicate%20\(5\)%20-%20DINAMICA%20PUNCTULUI%20MATERIAL.pdf](http://cat.mec.pub.ro/archive/Bazele%20Mecanicii%20Aplicate%20(5)%20-%20DINAMICA%20PUNCTULUI%20MATERIAL.pdf)
16. Niculae M. Bazele mecanicii aplicate, Partea VI-a Mecanică Analitică,
[http://cat.mec.pub.ro/archive/Bazele%20Mecanicii%20Aplicate%20\(7\)%20-%20MECANICA%20ANALITICA.pdf](http://cat.mec.pub.ro/archive/Bazele%20Mecanicii%20Aplicate%20(7)%20-%20MECANICA%20ANALITICA.pdf)
17. Pîrvulescu L.D., Fundamente de inginerie mecanică, Editura Politehnica, Timișoara, 2021,
<http://www.mec.upt.ro/rezi/FIM21PIRVULESCU.pdf>
18. Popa A. și colectivul, Îndrumător de Lucrări la rezistența materialelor (I), Ediția a II-a, revizuită și adăugită, Editura UTPRESS Cluj-Napoca, 2020
19. Radeș M., Rezistența materialelor I, Editura Printech, 2010
20. Sofonea G., Pascu A.M., Rezistența materialelor, Universitatea „Lucian Blaga” din Sibiu, 2006
21. Stănescu C.A., Talpoș S., Dafinei A., Mecanică fizică, Politehnica Press, București, 2005
22. Stoenescu Al., Buzdugan Gh., Culegere de probleme de mecanică teoretică, Editura Tehnica, 1958
23. Tripa P. Hlușcu M., Rezistența Materialelor, Editura Mirton, Timișoara, 2006
24. Tripa P. Rezistența materialelor, Editura Mirton, Timișoara, 1999
25. Vlase S., Teodorescu H., Scutaru L., Guiman V., Munteanu V., Stanciu A., Purcarea R., Cinematica și dinamica. Culegere de probleme, Editura Infomarket, 2009, Brașov